COURS COMPLET D'ÉTUDES, COMPRENDANT TOUS LES OBJECT DE LA...







COURS COMPLET
D'ÉTUDES,

COMPRENANT TOUS LES OBJETS DE LA COMPTABILITÉ COMMERCIALE.

ARITHMÉTIQUE COMMERCIALE.

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Qui se trouvent à Paris, chez lui, rue des Vieux-Augustins, n°. 10; et chez Saintin, libraire, rue du Foin-Saint-Jacques, n°. 11.

COURS COMPLET D'ÉTUDES, comprenant tous les objets de la Comptabilité commerciale, composé des ouvrages ci-après, qui se vendent aussi séparément. 6 vol. in-8°. 29 fr.

SAVOIR :

Arithmétique Commerciale, appliquée exclusivement à tous les usages du Commerce et de la Banque. 1 vol. in-8°. 6 fr.

Manuel du Commerce, ou *Vade mecum des Commerçans*, traitant du toisé, de la réduction des poids, mesures et monnaies de tous les peuples civilisés, et de leurs rapports mutuels, etc., avec tableaux. 1 vol. in-8°. 6 fr.

Traité du Change et Manuel de la Banque actuelle, comprenant un cours complet d'opérations de banque; exposant les systèmes monétaires de l'Europe, etc. 2 vol. in-8°. 8 fr.

La Tenue des livres rendue facile. 1 vol. in-8°. 6 fr.

La même généralisée, ou Traité des Comptes en participation. Petit vol. in-8°. 3 fr.

Ouvrages étrangers au Cours complet.

L'Arithmétique pratique, ou Traité complet d'Arithmétique, comprenant tout ce que cette science peut embrasser, à l'usage des professeurs, etc., 2 vol. in-8°. 8 fr.

Tenue des livres des Receveurs généraux. Pet. vol. in-8°. 3 fr.

Tablettes des Négocians, exposant les systèmes monétaires des peuples commerçans, le rapport de leurs poids et mesures, et les modes de leurs changes, fixés au pair dans un vol. in-18. *portatif.* 3 fr.

Tableau du pair universel des monnaies des peuples commerçans, exposant la valeur intrinsèque de l'unité de la monnaie de compte de chaque peuple en monnaie de chacun des autres. 1 feuille papier grand jésus. 1 fr. 80 c.

Feuilles gravées servant à faciliter les balances périodiques de tous les mois. 1 feuille papier grand jésus. 1 fr.

La Balance simplifiée, petit supplément servant à compléter les éditions antérieures aux 10e. et 11e. 1 fr. 25 c.

Feuilles gravées pour tenir les livres par le moyen d'un seul registre, d'après la méthode contenue dans la *Tenue des livres rendue facile*, à l'usage des agens de change, des receveurs généraux *pour leur compte particulier*, des capitalistes et, en général, de tous les particuliers dont les affaires n'entraînent que peu de détails. Le cahier de 6 feuilles, à 1 fr. 25 c. 7 fr. 50 c.

Le registre cartonné de 24 feuilles à 1 fr. 25 25 fr.

IMPRIMERIE DE FAIN, PLACE DE L'ODÉON.

ARITHMÉTIQUE

COMMERCIALE,

ANALYSÉE ET DÉMONTRÉE DANS SES DIFFÉRENTES APPLICATIONS AUX USAGES DU COMMERCE ET DE LA BANQUE :

COMPRENANT, avec un Traité complet des quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, des Fractions décimales et ordinaires, des Règles de TROIS, CONJOINTE, de COMPAGNIE, d'ALLIAGE, des abréviations usuelles, etc., une formule générale pour les changes étrangers ; et, en un volume séparé, le

MANUEL DU COMMERCE,

Traitant du Toisé, de la Réduction des poids, mesures et monnaies de tous les peuples commerçans, de leurs rapports mutuels, etc.

PAR EDMOND DEGRANGE,

MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ ROYALE ACADÉMIQUE DES SCIENCES DE PARIS.

A PARIS,

CHEZ SAINTIN, LIBRAIRE,

RUE DU FOIN-SAINT-JACQUES, N°. 11.

1819.

AVERTISSEMENT

DE L'AUTEUR.

J'AI déjà publié l'*Arithmétique Pratique*, dans laquelle j'ai pour ainsi dire épuisé mon sujet, et qui, par cette raison, est la plus complète qui existe; mais j'ai reconnu depuis que cette richesse de matières, qui est un mérite aux yeux des gens qui veulent approfondir cette science, est au contraire, si j'ose le dire, un défaut pour la presque généralité des commerçans; que les notions de géométrie que cet ouvrage comprend, avec les règles qui en dépendent, les fractions continues, les progressions, les logarithmes, etc., ne sont d'aucune utilité dans le commerce; enfin, j'ai senti que les personnes toutes livrées aux soins de leurs affaires, ne s'occupent jamais que des règles qui leur sont nécessaires.

D'un autre côté, quelles que soient la simplicité et la brièveté de chaque démonstration en particulier dans l'*Arithmétique Pratique*, j'ai eu l'occasion de m'assurer que les professeurs, ayant à choisir dans cet ouvrage, d'une grande étendue, les exemples et les applications à l'usage du commerce, désiraient une arithmétique spécialement appliquée à ces mêmes usages; enfin une arithmétique toute commerciale, qui manquait jusqu'à ce jour.

Aussitôt que j'en ai senti l'utilité, faisant taire toute autre considération, j'ai mis la main à l'ouvrage.

L'*Arithmétique Commerciale* que je publie en est le résultat : elle a pour objet toutes les applications utiles au commerce et à la banque, et je me suis proposé d'y donner les moyens de former en peu de temps de bons arithméticiens, capables de faire sans difficulté tous

les calculs auxquels le commerce seul peut donner lieu.

D'après mon plan, j'ai dû séparer de mon *Arithmétique Commerciale* tout ce qui m'a paru lui être étranger, et appartenir à la géométrie en particulier. Mais j'ai traité séparément ces matières, très-distinctes de l'arithmétique, dans deux autres ouvrages.

Ainsi, le *Manuel du Commerce* dans lequel j'ai donné les moyens les plus faciles d'opérer la réduction réciproque des poids, mesures et monnaies de tous les peuples commerçans, est une suite nécessaire de l'*Arithmétique Commerciale*, lorsqu'on veut, après avoir vu à fond celle-ci, opérer la réduction réciproque des poids, mesures et monnaies quelconques des différentes nations.

Mon *Traité de Change* en est également une suite nécessaire, lorsqu'on veut se livrer

aux spéculations du change ou de la banque, dont les principes sont bien distincts de ceux de l'arithmétique, et exigent autant de développemens que ces derniers.

Si cette nouvelle arithmétique abrége les études des personnes destinées au commerce, et leur offre une utilité qui lui soit propre, j'aurai atteint le but que je me suis proposé (*a*).

E. Degrange

OBSERVATION NÉCESSAIRE.

Les numéros qui sont au commencement des alinéas marquent le rang des articles. Ces mêmes numéros, lorsqu'ils sont placés dans le corps d'un paragraphe, entre deux parenthèses, indiquent les articles qu'il faut revoir pour comprendre celui qu'on lit. Par exemple, lorsqu'on trouve dans le corps de l'ouvrage (100), je veux dire qu'il faut revoir ce que j'ai dit à l'article 100.

(*a*) L'Auteur admet chaque mois quatre élèves à ses cours de changes étrangers, d'arbitrage et de tenue des livres.

Ces cours ont lieu en particulier, pour chaque élève, chez l'Auteur, rue des Vieux-Augustins, n°. 10.

ARITHMÉTIQUE
COMMERCIALE.

PREMIÈRE PARTIE.

DE L'ARITHMÉTIQUE ET DE SES OPÉRATIONS FONDAMENTALES.

Des grandeurs ou quantités représentées par les nombres.

1. On appelle en général *grandeur* ou *quantité* tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. Par ex., l'*étendue*, la *durée* ou le temps, la pesanteur ou le *poids*, le *prix numéraire* des choses, etc., sont des quantités; ainsi que les collections d'objets pareils ou d'individus d'une même espèce.

2. Comme collection d'objets individuels d'une même espèce, une quantité est désignée par le mot *nombre*.

3. Considérée dans un seul tout, tel, par ex., que la distance existante entre deux objets éloignés l'un de l'autre, sans distinction d'aucunes parties, elle est appelée *continue*.

4. Les grandeurs continues appartiennent à la géométrie. Nous ne pouvons que les mesurer les unes par les autres, ou les comparer; et lorsqu'il s'agit d'en exprimer une d'espèce quelconque, nous ne le pouvons qu'en exprimant sa relation avec une autre de même espèce, adoptée pour lui servir de mesure.

5. Toute quantité continue a donc nécessairement pour mesure une autre quantité de même sorte. Par ex. : l'éten-

due en longueur a pour mesure l'étendue de *un* pied, *une* toise, ou *un* mètre, etc.; le temps a pour mesure une partie de la durée, telle qu'*un* jour, *un* mois, *un* an, etc.; et la pesanteur a pour mesure un poids tel que : *une* once, *un* marc, *un* gramme; enfin les valeurs numéraires ont pour mesure une valeur numéraire de *un* franc, *un* florin, *un* rouble, et ainsi des autres.

Chacune de ces mesures, considérée comme formant un seul objet individuel, et en général chaque objet individuel, tel que : *un* homme, *un* caillou, etc., nous montre le nombre singulier que l'on exprime par le mot *un*, ou par le signe 1, appelé unité, pour avertir qu'il représente un objet formant un seul tout individuel.

C'est particulièrement dans ce signe *un* ou 1 que l'on considère le nombre un ou l'unité.

6. Tous les autres nombres ne sont que des collections ou assemblages d'unités, ou de parties égales de l'unité. Par ex.: cette collection *un*, plus *un*, compose le nombre que l'on appelle *deux*; celle-ci, *un*, plus *un*, plus *un*, compose le nombre *trois*, et ainsi des autres. De même *un tiers*, plus *un tiers*, ou *un quart*, plus *un quart*, plus *un quart*, compose le nombre *deux tiers*, ou *trois quarts*, dans lesquels la partie *un tiers* ou *un quart* est prise pour unité, c'est-à-dire, pour le nombre *un*. Conséquemment :

7. L'unité sert à représenter *un* mètre par exemple, ou *un* gramme, ou *un* franc, etc.; en un mot, la quantité qui est prise pour servir de mesure à toutes celles d'une même espèce.

8. Le nombre sert à représenter une quantité composée d'autant de fois celle qui lui sert de *mesure*, ou d'autant de parties égales de celle-ci, qu'il y a d'unités, ou de parties de l'unité dans ce même nombre (*a*).

(*a*) C'est par cet artifice que les nombres représentent les quantités

9. Ainsi l'unité, considérée dans l'objet qu'elle représente, est une quantité qui est le plus souvent arbitrairement choisie pour servir de mesure ou d'objet de comparaison à toutes les quantités d'une même espèce.

Considérée en elle-même, elle n'est autre chose que le nombre *un*.

10. Les nombres sont l'objet spécial de l'arithmétique; elle ne considère les quantités que dans les nombres qui les représentent.

DE L'ARITHMÉTIQUE.

11. L'arithmétique est la science des nombres.

Le nombre *un* ou l'unité qui sert à composer tous les autres nombres (6), leur sert aussi de mesure. En effet, le nombre *deux*, par exemple, comparé à l'unité, est évidemment deux fois grand comme celle-ci; *trois* est aussi évidemment trois fois grand comme l'unité, qui par conséquent lui sert de mesure, et ainsi des autres.

12. Lorsqu'un nombre exprime combien de fois une quantité quelconque contient celle qui est prise pour lui servir de mesure, ou l'une des parties égales de cette même mesure, ce nombre est alors appelé *rapport*, pour avertir qu'il existe la même relation ou le même rapport de grandeur, entre ce nombre et l'unité, qu'entre les deux quantités dont l'une sert de mesure à l'autre. Par exemple : le nombre quatre mille cinq cents toises n'est autre chose que le rapport de la longueur du chemin de Paris à Saint-Denis avec celle de la toise, parce qu'il contient l'unité autant de fois

---

continues. Par ex. : une toise étant prise pour mesure de longueur, celle du chemin de Paris à Saint-Denis est représentée par le nombre quatre mille cinq cents toises, parce qu'elle contient 4500 fois la longueur d'une toise.

que la première de ces deux longueurs contient la seconde. Donc, en dernier résultat :

13. Tout nombre considéré comme exprimant le résultat de la comparaison de deux quantités, n'est autre chose que le rapport de celle qu'il représente, avec celle qui est représentée par l'unité, ou que l'expression du rapport d'une grandeur à une autre; en un mot, qu'un rapport. Mais considéré en lui-même :

14. Le nombre n'est autre chose qu'une collection quelconque d'unités ou de parties égales de l'unité.

15. Le nombre composé d'unités entières est appelé nombre *entier*. Par ex. : le nombre *deux* ou *trois*, etc., est un nombre *entier*.

16. Celui qui est composé d'une ou plusieurs parties de l'unité s'appelle *fraction*. Par exemple : *trois quarts* est une *fraction*.

17. Celui qui est composé d'unités entières et de parties de l'unité est appelé nombre fractionnaire. Par ex. : *deux, trois quarts* est un nombre fractionnaire.

18. Un nombre qu'on énonce sans désigner l'espèce de l'unité, tel que *deux*, *trois* ou *quatre*, etc., ou comme quand on dit, *trois* ou *trois fois*, *quatre* ou *quatre fois*, etc., s'appelle *nombre abstrait;* lorsqu'on énonce en même temps l'espèce de l'unité, comme quand on dit, *quatre francs*, *neuf mètres*, etc. ; on l'appelle *nombre concret*.

19. L'arithmétique a pour objet de donner les moyens les plus prompts et les plus faciles d'exprimer ou représenter les nombres, ce qui constitue *la numération;* de les composer et décomposer, ce qui constitue les *opérations du calcul;* de les comparer entre eux ou d'en déterminer les rapports, et d'en comparer les rapports égaux, ce qui constitue la théorie des *rapports* et celle des *proportions* empruntées de la géométrie.

De la numération.

20. La numération est l'art d'exprimer ou représenter tous les nombres par le moyen d'une quantité limitée de noms et de dix chiffres seulement.

21. Dans la suite non interrompue des nombres qu'on peut former en ajoutant une unité à une autre, puis une encore à ces deux, une nouvelle à ces trois premières, et ainsi de suite, ils croissent successivement d'une unité jusqu'à l'infini. La numération en offre l'expression dans cet ordre : *un*, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit*, *neuf*, *dix unités*, et ainsi de suite.

On conçoit que pour ne pas les confondre, il était nécessaire de les distinguer par des noms; mais combien cette nomenclature aurait été compliquée si on n'avait pu la simplifier !

22. Pour porter la numération au-delà de dix sans trop multiplier les noms, on est convenu de prendre dix unités pour une seule, à laquelle on a donné le nom de *dizaine*, comme étant composée de dix unités simples; on compte également par une, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf dizaines, et lorsqu'on est arrivé à dix, on les prend encore pour une unité à laquelle on a donné le nom de centaine, comme étant composé de dix dizaines égales à cent unités; enfin on compte de la même manière les centaines dont les dix sont également prises pour une unité à laquelle on a donné le nom de *mille*, et on continue à compter ainsi jusqu'à neuf chaque nouvelle sorte d'unité, et à en prendre successivement dix pour une seule jusqu'à l'infini, à chacune desquelles on donne d'après les noms précédens, celui de *dizaine de mille*, *centaine de mille*, *million*, *dizaine de million*, *centaine de million*, et ainsi de suite pour les *billions*, *trillions*, *quatrillions*, *etc.*

23. Les dix chiffres ou caractères dont on fait usage dans la numération dont nous exposons les principes, et les noms

des nombres qu'ils représentent, sont tels qu'on les voit ici :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zéro,	un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf.

Pour exprimer tous les nombres possibles par le moyen de ces dix chiffres seulement, on est convenu de leur attribuer une valeur locale. Par ex. : chacun de ces mêmes chiffres qui n'exprime que des unités simples, s'il est seul ou s'il est le premier à la droite d'une suite quelconque de chiffres, exprime des dizaines à la seconde place, des centaines à la troisième, des unités de mille à la quatrième, des dizaines de mille à la cinquième, des centaines de mille à la sixième, et ainsi de suite pour les millions, billions, trillions, etc., le tout à partir de la droite en avançant vers la gauche.

24. Le zéro n'exprime aucune valeur en particulier, et ne sert qu'à occuper la place des unités d'un ordre quelconque qui manquent dans un nombre, afin que les autres chiffres puissent être placés au rang qu'ils doivent occuper (25).

25. Cela posé, pour exprimer en chiffres un nombre quelconque, par ex. : pour exprimer *soixante-sept* qui contient six dizaines et sept unités (22), on écrit 67 (23); pour exprimer *quatre-vingt-dix*, qui contient exactement neuf dizaines, on écrit 90, où l'on voit que le zéro, qui occupe la place des unités, ne sert qu'à ranger l'autre chiffre à celle des dizaines qu'il doit occuper (24); pour exprimer *cinq cent quatre-vingt-dix*, qui contient cinq centaines et neuf dizaines, on écrit 590 (23); pour exprimer *trois mille cinq cents*, qui contient trois unités de mille et cinq centaines, on écrit 3500 (23); pour exprimer *quatre-vingt-dix mille*, qui contient exactement neuf dizaines de mille, on écrit 90,000 (23); enfin, pour exprimer *cinq cent quatre-vingt-dix mille*, qui contient cinq centaines et neuf dizaines de mille, on écrit 590,000; et ainsi des autres.

26. Observons ici que les trois premiers chiffres de la droite d'un nombre quelconque expriment des unités, dizaines et centaines; que les trois suivans expriment également

des unités, dizaines et centaines de mille (23), et ainsi de suite pour les millions, billions, trillions, etc. Qu'ainsi toute la difficulté de la numération se réduit à bien savoir écrire et énoncer une suite de trois chiffres.

Pour énoncer une suite quelconque de chiffres, il ne faut donc que la partager en classes ou suites de trois chiffres, chacune à partir de la droite, séparées l'une de l'autre par une virgule : la première suite de la droite sera alors celle des *unités simples*; la seconde, celle des *unités de mille*; la troisième celle des *millions*; la quatrième celle des *billions*; la cinquième celle des *trillions*, etc.; puis on énoncera la première tranche de la gauche comme si elle était seule, et on énoncera successivement toutes les autres en prononçant seulement à la fin de chacune le nom qui lui appartient. Par ex. : pour énoncer le nombre suivant :

Trillions,	*billions*,	*millions*,	*mille*,	*unités*.
180,	950,	747,	548,	670.

on dira : cent quatre-vingt trillions, neuf cent cinquante billions, sept cent quarante-sept millions, cinq cent quarante-huit mille, six cent soixante-dix unités, et ainsi des autres.

27. Il résulte de ce qui précède, que les unités exprimées par les divers chiffres d'un nombre forment une suite d'unités, qui sont de dix en dix fois plus grandes, ou qui croissent de dix en dix fois de valeur jusqu'à l'infini, à mesure qu'on avance d'un rang de plus vers la gauche, à partir du premier chiffre de la droite; puisque les dizaines sont composées de dix unités, les centaines de dix dizaines, les unités de mille de dix centaines, et ainsi de suite.

28. Ainsi, pour rendre un nombre dix fois plus grand, il ne s'agit que de placer un zéro à sa droite, parce qu'alors chacun des chiffres qui le composent se trouvera avancé d'un rang de plus vers la gauche, où il aura augmenté dix fois de valeur, les unités se trouvant avancées au rang des dizaines et celles-ci au rang des centaines, ces dernières à celui des mille, et ainsi de suite (23).

29. Également on peut rendre un nombre cent fois plus grand en ajoutant deux zéro à sa droite, parce qu'alors les unités se trouvent avancées au rang des centaines, les dizaines à celui des unités de mille, etc. (23).

Et, par les mêmes raisons, on peut rendre un nombre cent mille, dix mille ou cent mille fois plus grand, en ajoutant trois, quatre ou cinq zéro à sa droite, et ainsi de suite jusqu'à l'infini.

30. Au contraire, les unités exprimées par les divers chiffres d'un nombre forment une suite d'unités qui sont de dix en dix fois plus petites, ou qui décroissent de dix en dix fois de valeur, à mesure qu'on rétrograde d'un rang de plus vers la droite, à partir du premier chiffre de la gauche, puisque les centaines, par exemple, valent dix fois moins que les unités de mille, les dizaines dix fois moins que les centaines, et les unités simples dix fois moins que les dizaines.

Ainsi on peut rendre un nombre dix fois plus petit, en retranchant un des zéro qui se trouvent placés à sa droite, parce qu'alors tous les chiffres qui le composent se trouveront reculés d'un rang vers la droite, où chacun d'eux diminue dix fois de valeur; les dizaines, par exemple, se trouvant reculées à la place des unités, les centaines à celle des dizaines, et ainsi de suite.

31. On peut également rendre un nombre cent fois, mille fois, ou cent mille fois plus petit, en retranchant 2, 3, 4, ou 5, des zéro qui se trouveront placés à sa droite, parce qu'alors les dizaines, les centaines, les unités de mille, les dizaines de mille, ou les centaines de mille de ce même nombre, se trouveront reculées au rang des unités simples, où elles auront perdu cent fois, mille fois, dix mille fois ou cent mille fois de leur valeur primitive, et ainsi de suite.

32. Tel est le système de numération des entiers, qui est, comme on le voit, purement de convention, puisque les unités qui croissent de dix en dix fois de valeur, à mesure

qu'on avance d'un rang de plus vers la droite (27), et qui décroissent en sens inverse de dix en dix fois de valeur (30), pourraient croître et décroître dans tout autre rapport, si on en était convenu.

33. Quant aux subdivisions que l'on peut faire de l'unité en parties de diverses grandeurs, aux différens noms qu'on leur donne, et à la manière de les exprimer, il en sera traité dans la suite.

Mais on traitera en ce lieu des subdivisions que l'on fait de l'unité en parties de dix en dix fois plus petites, ou en décimales, parce qu'elles ne sont qu'une suite naturelle du système de numération déjà établi, et qu'elles en offrent un nouveau développement.

Des décimales.

34. Ayant remarqué que la numération forme une suite d'unités qui croissent de dix en dix fois de valeur juqu'à l'infini (27), et réciproquement, qui décroissent de dix en dix fois de valeur jusqu'à l'unité simple dans le sens inverse (30), on a imaginé de prolonger également jusqu'à l'infini cette suite d'unités décroissantes, en continuant à retrogader successivement et sans fin de l'unité simple à de nouvelles unités de dix fois en dix fois plus petites, auxquelles on a donné le nom de parties décimales, ou simplement de décimales, parce qu'elles ne servent qu'à représenter des parties de l'entier de dix en dix fois plus petites jusqu'à l'infini.

En conséquence on est convenu que l'unité, telle qu'elle soit, *toise*, *mètre* ou *franc*, etc., serait divisée en dix parties égales, ou serait considérée comme étant composée de dix unités, chacune dix fois plus petite que l'unité simple, auxquelles on donne par cette raison le nom de *dixièmes*.

35. On considère également le dixième comme étant composé de dix unités dix fois plus petites chacune que le dixième, qui sont par conséquent cent fois plus petites que l'unité

simple, et auxquelles on donne par cette raison le nom de *centièmes*.

36. On divise également le centième en dix parties, qui sont conséquemment mille fois plus petites que l'unité principale, et auxquelles on donne le nom de *millièmes*. Or, en continuant de subdiviser de la même manière chaque nouvelle espèce d'unité en dix autres unités dix fois plus petites, on a successivement des *dixièmes de millièmes*, des *centièmes de millièmes*; des *millionièmes*, des *dixièmes* et des *centièmes de millionièmes*, des *billionièmes*, *dixièmes de billionièmes* et *centièmes de billionièmes*; et ainsi de suite jusqu'à l'infini.

37. Cela posé, on compte ces nouvelles unités comme les unités simples, les dizaines, les centaines, etc. Par ex. : on compte par un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf millièmes, et de dix on en compose un centième; on compte de la même manière les centièmes dont les dix composent un dixième, dix dixièmes composent également un entier, ou l'unité simple, comme dix unités simples composent une dizaine, etc.

38. On représente également les parties décimales par les mêmes chiffres et dans le même ordre que les unités simples, les dizaines, les centaines, etc.; et comme dans les nombres entiers, les centaines, par exemple, sont placées à la droite des unités de mille, parce qu'elles sont dix fois plus petites que ces dernières (30), que par la même raison les dizaines sont placées à la droite des centaines, etc.; dans les nombres suivis de décimales, on place aussi les dixièmes à la droite des unités simples, parce qu'ils sont dix fois plus petits que ces dernières; mais on les en sépare par une virgule, afin de distinguer clairement, une fois pour toutes, les décimales des entiers; par la même raison, on place aussi les centièmes à la droite des dixièmes, ou au second rang sur la droite de la virgule; les millièmes à la droite des centièmes, ou au troisième rang sur la droite de cette même virgule; les dix mil-

lièmes au quatrième rang, et ainsi de suite. De manière que les chiffres qui les représentent expriment des unités de dix en dix fois plus petites, à mesure qu'ils sont placés à un rang de plus en plus éloigné sur la droite de la virgule, ou, ce qui est la même chose en d'autres termes, à mesure que l'on continue à rétrograder de gauche à droite comme dans les nombres entiers (30); et réciproquement ces mêmes chiffres représentent des unités qui sont de dix en dix fois plus grandes dans le sens inverse, exactement comme dans les nombres entiers.

39. Ainsi, pour exprimer en chiffres *quatre entiers*, *trois dixièmes*, on écrit : 4, 3. Pour exprimer *quatre entiers*, *trois dixièmes* et *quatre centièmes*, on écrit : 4, 34; où l'on voit que les *centièmes* sont placés à la droite des *dixièmes*, comme valant dix fois moins, ou au second rang, après la virgule, comme valant 100 fois moins que l'unité (38). Pour exprimer 8 millièmes à la suite de 4, 34, on écrit 4, 348; où l'on voit que les 8 millièmes sont placés à la droite des centièmes, comme valant dix fois moins, ou au troisième rang après la virgule, comme valant mille fois moins que l'unité (38).

40. Quant à la manière d'énoncer les décimales, elle est exactement la même que pour les nombres entiers; on énonce d'abord les entiers qui sont à la gauche de la virgule, et on énonce ensuite les décimales de la même manière, en observant seulement de prononcer à la fin le nom des unités décimales de la dernière espèce, nom que l'on trouve facilement en prononçant successivement sur chacun des chiffres qui sont après la virgule, à partir du premier qui est à sa droite, les noms suivans : *dixièmes*, *centièmes*, *millièmes*, etc. (35), jusqu'au dernier. Ainsi pour énoncer 4, 342, on dit, après avoir reconnu le nom de la décimale de la dernière espèce, quatre entiers, trois cent quarante-huit *millièmes*; et dans le cas où les entiers seraient des toises, on dirait : quatre toises, trois cent quarante-huit *millièmes* de toise.

Pour rendre l'énonciation des décimales encore plus facile, on peut écrire à leur suite le nom de celles de la dernière espèce. Par exemple : on aurait pu écrire à la suite du nombre ci-dessus, le nom de celles de la dernière espèce, ainsi 4, 348 *millièmes*, etc.

Maintenant il est facile d'apercevoir par quelle raison on énonce un nombre qui contient des *dixièmes*, des *centièmes*, des *millièmes*, etc., comme s'il ne contenait que des décimales de la dernière espèce. Dans le nombre 4, 348 *millièmes*, par exemple, le chiffre 3 peut se rendre indifféremment par 3 *dixièmes* ou 300 *millièmes ;* puisque le *dixième* étant composé de dix *centièmes*, et chaque *centième* de 10 *millièmes*, il en résulte que le *dixième* est évidemment composé de 10 fois 10 *millièmes* ou de 100 *millièmes*, qu'ainsi les trois *dixièmes* sont composés de 300 *millièmes*. Par la même raison, le chiffre 4 peut s'énoncer en disant : 40 *millièmes*, puisque chaque *centième* vaut 10 *millièmes*, et ainsi des autres.

41. Lorsque le nombre qu'il s'agit d'exprimer en chiffres ne contient que des décimales, on met un zéro avant la virgule pour tenir la place des unités ; ainsi, pour marquer 34 *centièmes*, on écrirait 0,34 *centièmes*. Par les mêmes raisons, pour marquer 34 *millièmes*, on met un zéro à la place des unités et à celle des *dixièmes*, tant parce qu'il n'y a point d'unités et de *dixièmes* dans ce nombre, que pour ranger les parties suivantes au rang qu'elles doivent occuper pour conserver leur véritable valeur (24). Ainsi, pour marquer 34 *millièmes*, on écrirait 0,034 ; pour marquer 6 *millièmes*, on écrirait 0,006 *millièmes*, ou pour marquer 7 dix *millièmes*, on écrirait 0,0007 dix *millièmes*, etc.

42. Telles sont les parties de l'entier que l'on appelle décimales. La grandeur des unités qui les représentent n'étant déterminée que par la plus ou moins grande distance où elles se trouvent placées sur la droite de la virgule qui les sépare des entiers (38), il en résulte qu'on peut ajouter un,

deux ou trois zéro, etc., à la droite d'un nombre décimal, et réciproquement qu'on peut retrancher un, deux ou trois, etc., des zéro placés à sa droite, sans en changer la valeur ; puisque chacun des chiffres qui expriment des unités décimales est placé à la même distance de la virgule, soit que ces zéro aient été ajoutés à la droite de ce nombre, ou qu'ils en aient été retranchés.

Ainsi 3, 3 *dixièmes* est la même chose que 3, 30 *centièmes*, ou que 3,300 *millièmes*, ou que 3,3000 *dix millièmes*, etc., d'autant que chaque *dixième* valant dix *centièmes*, ou 100 *millièmes*, etc., les trois *dixièmes* valent évidemment 30 *centièmes* ou 300 *millièmes*, etc., et peuvent se rendre indifféremment de l'une ou de l'autre manière (40).

43. Mais la distance où chaque chiffre se trouve de la virgule, servant seule à fixer la grandeur des unités qu'il représente (38), le déplacement de la virgule suffit pour changer la valeur des nombres. Par exemple : si on transporte la virgule à la gauche du chiffre qui représente les unités simples, dès lors les dizaines se trouvant reculées à la place des unités, ces dernières à celle des dixièmes, ceux-ci à celle des centièmes, etc. ; en un mot, chaque chiffre se trouvant reculé d'un rang sur la droite, est réduit à une valeur dix fois plus petite que celle qu'il avait avant ce déplacement de virgule, parce qu'on a retranché un chiffre à la droite des entiers par ce même déplacement (30).

44. On peut donc rendre un nombre 10 fois, 100 fois, 1000 fois, ou 10000 fois, etc., plus petit, en transportant la virgule à la gauche du premier, du deuxième, du troisième ou du quatrième chiffre, etc., des nombres entiers ; parce qu'on en retranche un chiffre (30), deux chiffres (31), ou trois chiffres, etc., par ce déplacement (31).

45. Conséquemment on peut rendre un nombre 10 fois, 100 fois, 1000 fois, ou 10000 fois plus grand, en transportant la virgule après les *dixièmes*, les *centièmes*, les *milliè-*

mes, les *dix millièmes*, etc., dans les nombres composés d'entiers et de décimales, parce qu'on ajoute un chiffre (28), deux chiffres, trois chiffres ou quatre chiffres (29), etc., à la droite des entiers, par ce déplacement de virgule, ce qui rend le nombre dix fois, cent fois, mille fois ou dix mille fois plus grand; tandis que les autres chiffres des décimales, se trouvant à un rang plus rapproché de la virgule, ont aussi augmenté autant de fois de valeur.

Par les mêmes raisons, les nombres augmentent tous également 10 fois, 100 fois, 1000 fois ou 10000 fois, etc., de valeur, lorsqu'on supprime la virgule qui sépare les *dixièmes*, les *centièmes*, les *millièmes*, ou les *dix millièmes*, etc., des entiers.

46. Une dernière observation à faire, quant aux chiffres qui représentent des parties décimales et des nombres entiers, c'est qu'à partir du chiffre qui exprime des unités simples, et en avançant de droite à gauche, on aura des unités de 10 en 10 fois plus grandes jusqu'à l'infini, puisqu'on monte de l'unité aux dizaines, aux centaines, aux unités de mille, dizaines et centaines de mille, aux millions, etc., et ainsi de suite, jusqu'à une unité d'une grandeur infinie; et qu'en rétrogradant de gauche à droite jusqu'au chiffre qui exprime les unités simples, et de celui-ci aux chiffres qui expriment les dixièmes, centièmes, millièmes, dix millièmes, cent millièmes, millionièmes et ainsi de suite, on aura des unités de 10 en 10 fois plus petites, ce qui compose une suite infinie d'unités d'une grandeur et d'une petitesse infinie.

Les parties décimales qui étaient depuis long-temps en usage dans les mathématiques, dont elles simplifient beaucoup les calculs, composeraient toutes les divisions et subdivisions des monnaies, des poids et des mesures des divers peuples de la terre, s'ils adoptaient l'usage établi en France de subdiviser également les monnaies, les poids et les mesures en parties de dix en dix fois plus petites, ou en décimales; ces parties étant entre elles en même rapport que les unités simples, les

dizaines, les centaines, etc., se calculeraient de la même manière, ce qui débarrasserait les comptes des difficultés des fractions, et réduirait l'étude de l'arithmétique à celle des calculs des nombres entiers qui est à la portée des enfans de l'âge le moins avancé; mais comme l'empire de l'habitude retardera peut-être long-temps encore l'adoption générale de cet usage, malgré l'évidence de son utilité, nous traiterons en particulier des fractions, après avoir traité des opérations du calcul.

Des opérations du calcul.

47. Les opérations du calcul se réduisent à quatre, *l'addition*, *la soustraction*, *la multiplication* et *la division*.

Toutes les questions que l'on peut proposer sur l'arithmétique se réduisent à pratiquer une ou plusieurs de ces opérations fondamentales, qu'on appelle les quatre règles de l'arithmétique et qui constituent seules cette science avec la numération.

De l'addition.

48. Faire l'addition de deux nombres, c'est ajouter l'un à l'autre pour en composer un seul. Par ex. : dire 9 ajouté à 9 est égal à 18, ou compose le nombre 18, c'est faire une addition.

Le résultat de cette opération est appelé *somme*; et l'addition n'a d'autre objet que de faire connaître ce résultat.

Lorsqu'on veut faire l'addition de plus de deux nombres, exprimés chacun par un seul chiffre, il ne s'agit que d'en ajouter un troisième à la somme de deux, un quatrième à la somme de trois, un cinquième à la somme de quatre, et il suffit à chaque fois de savoir ce que donne une somme plus un nombre d'un seul chiffre; si on ne le savait pas on compterait par les doigts, et on ferait naturellement comme nous avons tous commencé. Exemple :

Addition.

	7
	9
	8
	6
	4
Somme . . .	34

49. Faire l'addition de différens nombres, chacun de plusieurs chiffres, c'est chercher combien ils ont à eux tous d'unités simples, d'unités de dizaines, d'unités de centaines; ou c'est chercher la somme des unités, celle des dizaines, des centaines, etc.: il faut donc faire par une suite d'additions ce qu'on ne peut faire en une, et la somme totale ne doit être que le résultat de plusieurs sommes partielles.

Pour éviter les méprises dans la recherche des sommes partielles, il faut écrire les uns au-dessous des autres tous les nombres que l'on veut additionner, en observant de placer tous les chiffres qui expriment les unités simples les uns sous les autres, de manière qu'ils soient dans une même colonne ou ligne perpendiculaire; tous les chiffres qui expriment les dizaines les uns sous les autres, de la même manière, et ainsi de suite pour les centaines, les unités de mille, etc.; car, de règle générale:

Dans toutes les additions, les unités d'une espèce quelconque doivent être posées chacune sous les unités de la même espèce, ou au rang assigné à leur espèce, pour conserver leur véritable valeur.

Par ex.: pour additionner 557, plus 49, plus 728, plus 946, plus 4, écrivez ces nombres les uns au-dessus des autres, et soulignez le dernier comme suit:

Nombres à additionner. . . .	557
	49
	728
	946
	4
Somme ou montant de l'addition. . .	2284

Observons ici que, pour abréger les phrases, nous exprimerons le mot plus, par $+$; l'égalité ou l'identité par $=$. Ainsi $7 + 9 = 16$ signifiera que 7 plus 9 est égal à 16 ou est la même chose que 16 (*a*).

Comme la somme des unités simples composera des dizaines, si elle contient plus de 9 unités simples (20), on conçoit qu'il faut commencer par additionner ces dernières, afin d'ajouter les dizaines qu'elles composeront à celles de la colonne suivante à gauche; qu'il faut ensuite additionner les dizaines afin d'ajouter les centaines qu'elles composeront (20) à celles de la colonne suivante, et ainsi de suite pour les unités de mille, dizaines et centaines de mille, etc.

Pour opérer l'addition des nombres ci-dessus, il faut donc commencer par chercher la somme des nombres qui sont dans la colonne des unités simples, et qui sont les mêmes que ceux du premier exemple (48); or $7 + 9 = 16$, $16 + 8 = 24$, $24 + 6 = 30$, $30 + 4 = 34$. Écrivez alors les quatre unités simples sous les unités simples, et retenez les trois dizaines pour les additionner avec celles de la colonne des dizaines; passez ensuite à l'addition ds e dizaines; or trois dizaines retenues de la somme précédente $+ 5 = 8$, $8 + 4 = 12$, $12 + 2 = 14$; $14 + 4 = 18$ dizaines qui composent une centaine et huit dizaines; écrivez huit dizaines sous les dizaines, et retenez 1 centaine, passez ensuite à l'addition des centaines; or une cen-

(*a*) Ce signe $=$, qui exprime l'égalité de deux quantités, exprime leur identité, c'est-à-dire que l'une est la même que l'autre.

taine retenue $+5=6$, $6+7=13$, $13+9=22$, écrivez 2 sous les centaines, et avancez l'autre 2 à la gauche du précédent.

3ᵉ. EXEMPLE.

	460
	250
	700
	590
Somme. . . .	2000

Dans cet ex., la colonne des unités n'étant composée que de zéro, écrivez zéro sous les unités dont la somme est zéro; et, n'ayant rien à retenir, dites 6 dizaines $+5=11$, $11+9=20$ qui contiennent exactement deux centaines; posez alors zéro sous les dizaines, et dites : deux centaines retenues $+4=6$, $6+2=8$, $8+7=15$, $15+5=20$. Posez zéro sous les centaines, et le chiffre 2 à gauche de ce zéro pour exprimer deux unités de mille (23); il en est de même de toutes les additions des nombres entiers. Donc, de règle générale :

50. *Pour opérer l'addition des nombres entiers, il faut commencer par additionner les unités du plus petit ordre, qui forment la première colonne de la droite; il faut ensuite additionner les autres de la même manière en avançant successivement vers la gauche de l'une à l'autre; mais il ne faut poser sous les unités de chaque ordre que les unités de la somme qu'elles composent, en observant d'en retenir les dizaines pour les additionner avec les chiffres de la colonne suivante à gauche, et ainsi de suite jusqu'à la dernière colonne, dont il faut poser la somme entière à la gauche des chiffres précédemment posés.*

De la preuve de l'addition.

51. Ce qu'on appelle preuve d'une opération arithmétique, est une autre opération que l'on fait pour s'assurer de l'exactitude du résultat de la première.

La preuve de l'addition se fait en additionnant de nouveau les unités de chaque ordre que l'on a déjà additionnées ; mais on commence par celles renfermées dans la première colonne de la gauche, sous laquelle on écrit leur somme entière sans en rien retenir ; on additionne successivement celles renfermées dans les autres colonnes, sous chacune desquelles on écrit la somme entière des unités qui y sont renfermées, en observant d'écrire le premier chiffre de la droite de chaque somme au rang qui lui appartient. Savoir : au rang des unités de mille, par exemple, quand c'est la somme des unités de mille ; au rang des centaines, quand c'est la somme de la colonne des centaines, et ainsi de suite.

On additionne ensuite ces sommes partielles, qui, étant les mêmes que celles qui ont composé la somme totale de la règle dont on fait la preuve, doivent former la même somme. Ainsi, ayant trouvé que l'addition des quatre nombres ci-après :

	557
	49
	728
	4
a pour somme. . . .	1338

En voici la preuve :

Somme partielle des centaines. .	12
Idem des dizaines	11
Idem des unités.	28
	1338

De la soustraction.

52. Oter ou retrancher un nombre d'un autre, afin de connaître leur *différence* ou le *reste*, c'est ce qu'on appelle faire une soustraction.

Par ex. : de 9 ôter ou retrancher 7, reste 2. Voilà une soustraction.

Le résultat de cette opération est appelé *reste*, et la soustraction n'a pour objet que de faire connaître ce résultat.

Ainsi, en généralisant les termes, faire une soustraction, c'est ôter, d'un tout connu, une partie connue, pour connaître la partie restante.

53. Et observons ici que, pour abréger les phrases, nous exprimerons dorénavant le mot moins par ce signe —; ainsi $9-7=2$, signifiera que 9 moins 7 est égal à 2.

54. Soustraire un nombre, composé de plusieurs chiffres, d'un autre nombre, composé de plusieurs chiffres, c'est chercher le reste des unités, celui des dizaines, celui des centaines, etc. Il faut donc faire, par une suite de soustractions, ce qu'on ne peut faire en une seule, et le reste total ne doit être que le résultat de plusieurs restes partiels (52).

Pour éviter les méprises, il faut écrire le nombre que l'on veut soustraire de l'autre, de manière que les unités de chaque ordre de l'un, soient sous les unités du même ordre de l'autre, comme on l'a déjà indiqué pour les nombres que l'on doit additionner (49); et tirer une ligne au-dessous du nombre que l'on veut soustraire.

EXEMPLE:

Du nombre. . .	8980
il faut soustraire. . .	545
Reste. . .	8435

Pour faire cette opération, commencez par faire la soustraction des unités; passez ensuite à celle des dizaines, et ainsi de suite (54).

Mais, comme les 5 unités du nombre inférieur ne peuvent être soustraites de 0 (24), qui occupe la place des unités dans le nombre supérieur, empruntez une dizaine sur le chiffre suivant à gauche de ce même nombre, laquelle vaut dix unités simples; or $10-5=5$, ou, en d'autres termes, de 10 soustraire 5 reste 5; écrivez ce reste 5 sous les unités

du nombre à soustraire, et passez à la soustraction des dizaines; or 4 dizaines du nombre inférieur + 1 dizaine empruntée dans l'opération précédente = 5, et 8 dizaines du du nombre supérieur — 5 = 3; écrivez ce reste 3 sous les dizaines du nombre à soustraire; passez ensuite à la soustraction des centaines; or 9 centaines du nombre supérieur — 5 = 4, écrivez ce reste 4 sous les centaines; enfin des 8 unités de mille du nombre supérieur n'ayant rien à retrancher, car il n'y a rien au rang des unités de mille au nombre inférieur, reste 8; écrivez ce reste 8 à la droite des précédens, et la soustraction est achevée, le reste total est 8435.

55. Observons ici qu'il est indifférent de retrancher d'un chiffre l'unité que l'on a empruntée, afin de n'avoir à en soustraire ensuite que les unités représentées par le chiffre correspondant du nombre inférieur, ou de n'en point retrancher d'abord cette unité, en observant de l'ajouter à celles représentées par le chiffre correspondant du nombre inférieur, que l'on en soustrait ensuite ainsi augmenté d'une unité, puisqu'elle est ôtée du chiffre sur lequel on l'a empruntée, d'une manière comme de l'autre; d'où il suit que le résultat des deux manières d'opérer est nécessairement le même.

56. Conséquemment, on peut emprunter une unité sur un des zéros du nombre supérieur comme sur tout autre chiffre, puisque cet emprunt est compensé dans l'opération suivante par l'unité que l'on ajoute au chiffre qui correspond à ce même zéro, et qu'ainsi le résultat de la soustraction est nécessairement le même que si on n'avait pas fait l'emprunt supposé (55).

2e. EXEMPLE.

Soit. . .	9000
dont il faut soustraire. . .	5945
Reste. . .	3055

Comme on ne peut soustraire 5 de zéro, qui occupe le rang des unités du nombre supérieur, empruntez une unité, qui en vaut dix sur le chiffre suivant du même nombre, quoiqu'il soit également un zéro; cet emprunt étant ainsi supposé, 10 — 5 = 5; écrivez donc ce reste sous les unités, et passez à la soustraction des dizaines; 4 dizaines du nombre inférieur plus 1 empruntée = 5, qui ne peuvent être encore soustraites du zéro qui occupe le rang des dizaines dans le nombre supérieur; empruntez encore une unité qui en vaut dix, sur le chiffre suivant à gauche, et alors 10 — 5 = 5; écrivez ce reste 5 sous les dizaines, et passez ensuite à la soustraction des centaines; 9 centaines du nombre inférieur plus une centaine empruntée = 10, qui ne peuvent être soustraites du zéro correspondant du nombre supérieur, empruntez encore une unité sur le chiffre suivant de ce même nombre; or 10 — 10 = 0, écrivez ce reste 0 sous les centaines; enfin 5 unités de mille du nombre inférieur plus 1 empruntée = 6, et 9 du nombre supérieur — 6 = 3; il faut donc écrire ce reste 3 à la gauche des précédens, et la soustraction est finie. Le reste total est 3055.

Il est évident qu'en ôtant 6 unités de mille de 9, au lieu de 5 qui sont seulement au nombre inférieur, on acquitte ou compense par ce moyen tous les emprunts précédens, puisque chaque unité empruntée a été successivement ajoutée au chiffre correspondant du nombre inférieur, et soustraite avec lui du chiffre supérieur sur lequel elle a été empruntée, jusqu'à celle de l'ordre le plus élevé (55). Donc en général:

57. Pour opérer la soustraction de deux nombres entiers quelconques,

Il faut placer le plus petit nombre sous le plus grand, en observant d'écrire les unités de chaque ordre de l'un sous les unités du même ordre de l'autre, comme pour l'addition (49), *et de souligner le plus petit pour le séparer du résultat; retrancher successivement les unités de chaque sorte du nombre inférieur, de celles qui leur correspondent dans le nombre*

supérieur, à commencer par les premières de la droite; et si les unités d'un certain ordre ne suffisent pas dans le nombre supérieur pour qu'on en puisse retrancher celles qui leur correspondent dans le nombre inférieur, il faut emprunter, sur le chiffre suivant à gauche, une unité qui en vaudra dix des précédentes; puis il faut ajouter au chiffre suivant du nombre inférieur l'unité empruntée, soustraire ce chiffre, augmenté de l'unité, de celui qui lui correspond dans le nombre supérieur, et ainsi de suite.

De la preuve de la soustraction.

58. On sait que toutes les parties d'un tout, prises ensemble, sont égales à ce même tout.

Il en résulte qu'en additionnant le reste d'une soustraction avec le nombre soustrait, la *somme* doit être égale au nombre sur lequel on a opéré cette soustraction.

Ainsi, pour faire la preuve d'une soustraction, il faut additionner le nombre soustrait avec le reste de la soustraction, pour voir si ce nombre devient égal, par le moyen de cette addition, au nombre dont il a été soustrait. Par ex. : ayant soustrait 545 de 8980, on a eu pour reste 8435 (54); si on additionne 545 avec le reste 8435, on aura 8980, qui est le nombre dont on a soustrait le premier.

Ci, additionnez	545	ou le nombre soustrait,
avec le reste	8435	
Vous aurez.	8980	

AUTRE EXEMPLE.

Ayant soustrait 5945 de 9000 dans le deuxième exemple (54), si on ajoute au nombre 5945 le nombre restant, qui est 3055, on aura le total 9000.

Ci, additionnez . . . . 5945, nombre soustrait,
avec. . . . . 3055, reste de la soustraction,

9000

59. Cette preuve de la soustraction offre un nouveau moyen de faire la soustraction elle-même d'une manière plus courte que celle déjà indiquée; car, puisque le reste de la soustraction, étant ajouté au nombre soustrait, doit être égal au nombre dont on l'a soustrait, il est évident qu'on peut opérer sans erreur une soustraction, en ajoutant, au nombre que l'on veut soustraire ce qui lui manque pour être égal à celui dont on veut le soustraire.

En effet, si, en reprenant le premier exemple de la soustraction (54), on veut soustraire 545 de 8980, il ne faut qu'ajouter au nombre 545 un nombre avec lequel 545 soit égal à 8980; ce qui se fait par la voix de l'addition, en disant : 5 unités à soustraire, plus 5 que j'ajoute, ou écris au-dessous, feront 10, c'est-à-dire, donneront 0 pour la somme et une dizaine que je retiens. Puis, passant à l'addition des dizaines, je dis : 4 dizaines + 1 retenue de l'opération précédente = 5; or 5 + 3, que j'écris au-dessous des dizaines, = 8; ainsi la somme aura 8 au rang des dizaines, comme le nombre 8980; puis, passant ensuite aux centaines, je dis : 5 + 4 que j'écris au-dessous feront 9; ainsi la somme aura 9 au rang des centaines comme le nombre dont on soustrait. Passant enfin à la dernière opération, je dis : attendu qu'il n'y a point d'unités de mille au nombre à soustraire, zéro ou rien + 8 que j'écris au rang des unités de mille, à la gauche des chiffres déjà écrits, feront 8; d'où il suit enfin que la somme des chiffres ajoutés successivement, et que j'ai additionnés avec ceux du nombre à soustraire, aura les mêmes chiffres que le nombre 8980 dont j'ai soustrait 545, et sera égal à ce nombre 8980.

Ci, voulant soustraire de	8980
le nombre.	545
ajoutez successivement ces 4 chiffres . . .	8435
la somme sera.	8980

Or 545, plus 8435 qu'on a successivement ajouté = 8980, ce qui prouve que la règle est bien opérée.

60. Ajouter et soustraire sont les deux opérations fondamentales du calcul; les autres ne sont toutes que des manières différentes d'additionner et de soustraire.

Observons ici que, dans l'addition de deux nombres, la somme est le résultat que l'on cherche.

Que, lorsqu'on soustrait un nombre d'un autre, le reste est le résultat que l'on veut trouver.

De la multiplication.

61. Multiplier un nombre entier par un autre, c'est faire, d'une manière abrégée, l'addition d'autant de fois l'un de ces deux nombres qu'il y a d'unités dans l'autre. Par exemp.: multiplier 5 par 3, ou 3 par 5, c'est faire l'addition de 3 fois 5 ou de 5 fois 3, dont le résultat est 15.

62. Le nombre qu'il s'agit de multiplier se nomme *multiplicande;* celui qui indique combien de fois on doit prendre ou additionner le multiplicande s'appelle *multiplicateur;* celui qui est le résultat de cette opération, et qui doit contenir autant de fois le multiplicande qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, s'appelle *produit.*

Dans la multiplication de 5 par 3, par exemple, 5 est le multiplicande, 3 le multiplicateur, et 15 le produit. Ainsi:

La multiplication peut être réduite au principe suivant:

63. *Il faut prendre ou additionner le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités au multiplicateur.*

64. *Le produit d'une multiplication n'étant autre chose que la somme d'autant de fois le multiplicande qu'il y a d'u-*

nités au multiplicateur, doit être nécessairement composé d'unités de même nature que celles qui composent le multiplicande; et le multiplicateur doit être considéré comme un nombre abstrait qui indique seulement combien on doit prendre ou additionner de fois le multiplicande. En effet, quand on demande, par exemple, ce que doivent coûter 9 mètres de toile à 5 fr. le mètre, il est évident qu'ils coûteront la somme de 9 fois 5 fr.; qu'ainsi le produit sera composé de 9 fois 5 fr., et aura des unités de même espèce que le multiplicande 5 fr.; enfin que le multiplicateur 9, soit qu'il marque des unités d'une espèce déterminée ou indéterminée, n'est destiné qu'à marquer qu'on doit prendre 9 fois le multiplicande.

65. Mais, lorsque les deux nombres qu'il s'agit de multiplier sont abstraits ou considérés comme abstraits, on peut indifféremment les prendre chacun pour multiplicande ou pour multiplicateur, parce que le produit contiendra autant de fois l'unité dans l'un de ces deux cas que dans l'autre. Par exemple, ayant à multiplier 5 par 3, il est indifférent de le faire, ou de multiplier au contraire 3 par 5, puisque le produit sera toujours 15.

En effet, si on représente le nombre 5 par cinq points placés sur une ligne horizontale, et si on place deux lignes semblables au-dessous de la première. Ainsi :

. . . . .
. . . . .
. . . . .

Le nombre total des points qui représentent des unités sera évidemment composé d'autant de fois 5 qu'il y a de lignes horizontales, c'est-à-dire de 3 fois 5 égal à 15; mais ces mêmes points forment aussi 5 colonnes ou lignes perpendiculaires composées chacune de 3 points, et, en les comptant en ce sens, on trouve autant de fois 3 points qu'il y a de colonnes, c'est-à-dire, 5 fois 3 égal à 15; donc 3 fois 5

ou 5 fois 3 donnent le même produit 15 (61); or le produit ne dépend pas de l'ordre dans lequel on compte les objets individuels dont les facteurs expriment le nombre, mais bien de leur nombre réel, toujours le même dans quelque ordre qu'on les compte; et on peut appliquer le même raisonnement à deux nombres quelconques. Donc:

66. *Le produit d'une multiplication sera composé d'un même nombre d'unités, ou sera le même, dans quelque ordre qu'on en multiplie les deux facteurs, considérés comme deux nombres abstraits.*

67. Le multiplicande et le multiplicateur prennent aussi le nom de facteurs quand on en parle sans qu'il soit nécessaire de les distinguer. Ainsi 3 et 5 sont les facteurs du produit 15.

Il résulte de ce qui précede, qu'en général:

68. *Multiplier deux nombres entiers l'un par l'autre, c'est en chercher ou composer un troisième appelé* produit, *dans lequel chacun des facteurs doit être contenu autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre.* Par exemple, ayant multiplié 3 par 5, le produit 15 doit contenir 3 fois 5 et 5 fois 3.

69. Pour abréger les expressions, on indique la multiplication par ce signe $\times$, qui exprime: *multiplié par*. Ainsi, $3 \times 5 = 15$ signifiera que 3 multiplié par 5 est égal à 15.

70. On abrége la multiplication de deux nombres entiers d'un seul chiffre, en retenant dans la mémoire tous les produits d'un chiffre par un chiffre. En effet, lorsqu'on connaît bien ces produits, et qu'il s'agit de multiplier un nombre d'un seul chiffre, par exemple, 9 par 5, on dit: $9 \times 5 = 45$, où l'on voit que la mémoire donne seule tout à coup le produit de 9×5, lequel produit est 45.

TABLE DE MULTIPLICATION *contenant toutes les multiplications et tous les produits d'un chiffre par un chiffre,*

2 × 2 = 4	4 × 4 = 16	6 × 6 = 36
2 × 3 = 6	4 × 5 = 20	6 × 7 = 42
2 × 4 = 8	4 × 6 = 24	6 × 8 = 48
2 × 5 = 10	4 × 7 = 28	6 × 9 = 54
2 × 6 = 12	4 × 8 = 32	
2 × 7 = 14	4 × 9 = 36	7 × 7 = 49
2 × 8 = 16		7 × 8 = 56
2 × 9 = 18	5 × 5 = 25	7 × 9 = 63
	5 × 6 = 30	
3 × 3 = 9	5 × 7 = 35	8 × 8 = 64
3 × 4 = 12	5 × 8 = 40	8 × 9 = 72
3 × 5 = 15	5 × 9 = 45	
3 × 6 = 18		9 × 9 = 81
3 × 7 = 21		
3 × 8 = 24		
3 × 9 = 27		

Observons, avant de passer outre, qu'on n'a pas compris dans la table de multiplication ci-dessus, celles des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 par 1 ou par l'unité; parce qu'un nombre quelconque, multiplié par l'unité, reste le même ou n'a d'autre produit que lui-même. Qu'ainsi :

71. *Lorsqu'on a l'unité pour l'un des deux facteurs, on peut prendre l'autre pour produit sans faire l'opération* (*a*).

72. Observons encore que les divers produits d'un même nombre par 2, 3, 4, 5, 6, etc., se nomment les multiples de ce nombre; ainsi 6, 9, 12, 15, 18, etc., sont des multiples de 3.

73. Quels que soient les nombres à multiplier, on n'opère jamais que par une suite de multiplications partielles, dans

(*a*) Ayant l'unité pour multiplicateur, on peut prendre le multiplicande pour produit; ayant l'unité pour multiplicande, on peut prendre le multiplicateur pour produit.

chacune desquelles la mémoire donne tout à coup le produit d'un chiffre par un chiffre; et le produit total ne doit être que le résultat de plusieurs produits partiels.

On ne peut faire une multiplication sans connaître tous les produits d'un chiffre par un chiffre; si on ne les connaissait pas, on ne pourrait trouver, qu'après plusieurs additions successives, le même résultat que la mémoire doit donner tout à coup.

Il faut donc savoir imperturbablement la table de toutes les multiplications d'un chiffre par un chiffre (70), et de leurs produits; mais c'est aussi tout ce qu'il faut savoir avec les lois de la numération, pour opérer sans difficulté la multiplication de deux nombres quelconques.

De la multiplication simple, ou par un nombre d'un seul chiffre.

Toutes les règles de la multiplication simple, ou d'un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre, se réduisent à celle-ci :

Pour éviter de confondre les chiffres du produit avec ceux des deux facteurs, il faut d'abord écrire ces deux derniers l'un au-dessous de l'autre, et tirer un trait sous le multiplicateur, afin d'écrire au-dessous le produit. Ensuite :

74. *Il faut multiplier successivement par le multiplicateur, chacun des chiffres du multiplicande, à commencer par le premier à droite, c'est-à-dire par les unités simples; en observant d'écrire seulement les unités de chaque produit sous les unités du même ordre du multiplicande, après le trait placé au-dessous du multiplicateur, et de retenir les dizaines, s'il en contient, pour les ajouter au produit suivant; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait le dernier produit que l'on place en entier à la gauche des chiffres déjà écrits.*

En un mot, il faut faire, par une suite de multiplications partielles, ce qu'on ne peut faire en une seule, et le produit total n'est que le résultat de plusieurs produits partiels.

Par exemple, pour multiplier 548 par 9, il faut écrire le multiplicateur 9 sous le multiplicande, et placer après le multiplicateur un trait, sous lequel on écrira le produit ainsi :

	548	*multiplicande.*
Multiplicateur	9	
	4932	*Produit.*

Pour avoir ce produit, multipliez d'abord les unités du multiplicande par 9, en disant $8 \times 9 = 72$ unités égales à 7 dizaines, qu'il faut retenir, plus deux unités, qu'il faut écrire sous les unités du multiplicande, au-dessous du trait placé après le multiplicateur.

Cela fait, multipliez également les dizaines du multiplicande par 9, en disant $4 \times 9 = 36$ dizaines, 36 et 7 retenues de l'opération précédente $= 43$ dizaines qui sont égales à 4 centaines qu'il faut retenir (74), plus trois dizaines qu'il faut écrire sous les dizaines; cela fait, multipliez de même les centaines, en disant $5 \times 9 = 45$ centaines; 45 centaines et 4 de retenues $= 49$, qu'il faut placer en entier au-devant ou à la gauche des nombres précédemment écrits, parce-qu'il n'y a plus rien à multiplier, et ainsi de suite (74).

75. Lorsque l'un des chiffres multipliés donne un produit qui contient un nombre exact de dizaines, il faut écrire un zéro sous ce même chiffre, tant pour marquer que son produit ne contient pas d'unités, que pour occuper la place des unités (74), puis retenir les dizaines pour les ajouter au produit suivant; et continuer l'opération comme on l'a déjà indiqué.

EXEMPLE :

Soit proposé de multiplier,

	596	*multiplicande.*
par	5	*multiplicateur.*
	2980	*produit.*

Pour avoir ce produit, on a dit 5 fois 6 font 30, dont on a posé le zéro sous les unités, parce qu'il n'y avait aucune quantité d'unités à exprimer, et qu'il fallait cependant occuper la place des unités, pour conserver à celles du produit suivant le rang des dizaines qu'elles doivent occuper. Or, ayant retenu 3, on a continué l'opération comme : (74).

76. Par la même raison, lorsqu'il se trouve des zéro à la droite des chiffres dont le multiplicande est composé, il faut poser un zéro sous chacun d'eux à mesure qu'on les multiplie par le multiplicateur, parce que leur produit ne peut être que zéro.

Par exemple :

Soit proposé de multiplier 75000 par 9

Multiplicande	75000
Multiplicateur	9
produit	675,000

En commençant toujours la multiplication par le premier chiffre de la droite, on a dit 9 fois 0 produit 0, et on a écrit 0 sous les unités sans rien retenir; ensuite 9 fois 0 ou 9 fois le second chiffre produit 0, que l'on a écrit sous les dizaines sans y rien ajouter, parce qu'il n'y avait rien de retenu du produit précédent; puis encore 9 fois 0 ou 9 fois le troisième chiffre a produit 0 que l'on a écrit sous les centaines, parce que le produit des centaines est en effet zéro; enfin on a dit 9 fois 5 unités de mille font 45 unités de mille, et on a écrit cinq unités de mille sous les unités de la même espèce, en retenant les 4 dizaines de mille, et enfin on a dit 9 fois 7 font 63, et 4 de retenues font 67 dizaines de mille, que l'on a écrit en entier au-devant des chiffres précédens, parce que la multiplication est finie.

Observons avant de passer outre, qu'en général :

77. *Le produit de la multiplication par un nombre d'un seul chiffre, ne peut pas avoir au-delà d'un chiffre de plus*

que le multiplicande. En effet, pour multiplier par 10 un nombre quelconque, il suffit d'ajouter un o à sa droite, et alors il n'a évidemment qu'un chiffre de plus, donc lorsqu'on multiplie par 9 ou par moins que 10, le produit ne peut avoir au-delà d'un chiffre de plus que le multiplicande.

De la multiplication par un nombre composé de plusieurs chiffres.

78. Lorsque le multiplicateur est composé de plusieurs chiffres, il faut opérer par chacun de ces chiffres comme on vient de le prescrire pour un seul (74). Ainsi l'opération se réduit à plusieurs multiplications par un seul chiffre, et il ne s'agit que de multiplier le multiplicande ;

1°. *Par le chiffre des unités du multiplicateur* (74), *ce qui donnera le produit partiel des unités du multiplicateur ;*

2°. *Par celui des dizaines dont il faut écrire le produit sous le précédent*, mais en observant d'en écrire le premier chiffre de la droite sous les dizaines, comme étant composé de dizaines, puisqu'on a multiplié par des dizaines, ou qu'on a multiplié des dizaines ;

3°. *Par celui des centaines dont on écrira le produit sous le précédent*, en avançant également d'un rang vers la gauche, c'est-à-dire en observant d'en écrire le premier chiffre de la droite sous les centaines, et ainsi de suite pour les unités de mille, dizaines de mille, etc., pour lesquelles on suivra la même loi.

Enfin toutes ces multiplications étant faites, on additionnera leurs produits particuliers, et la somme sera le produit total.

Si on propose donc de multiplier 37459 par 548, il faudra opérer comme ci-après :

37459	
548	
299672	produit des 8 unités du multiplicande.
149836	*id.* des 4 dizaines de *id.*
187295	*id.* des 5 centaines de *id.*
20527532	*produit.*

Pour faire cette opération, on a d'abord multiplié tous les chiffres du multiplicande 37459 par le nombre 8 des unités du multiplicateur, et on a écrit successivement sous le trait, après le multiplicateur, les chiffres du produit 299672, que l'on a trouvés en suivant les règles données pour le premier exemple (74); ce qui a donné le produit partiel du multiplicande par le chiffre 8, qui exprime les unités simples du multiplicateur.

Ensuite on a multiplié de même 37459 par les 4 dizaines du multiplicateur, c'est-à-dire, par 4, second chiffre du multiplicateur; mais on a placé le premier chiffre 6 de son produit 149836 sous les dizaines du produit précédent, comme étant le produit des dizaines composant un nombre de dizaines; ce qui a donné le produit partiel du multiplicande, par le chiffre qui exprime les dizaines du multiplicateur.

Multipliant enfin également 37459 par 5, troisième chiffre du multiplicateur, on a écrit le produit 187295 sous le précédent; mais en plaçant le premier chiffre 5 sous les centaines, parce que le nombre par lequel on a multiplié est un nombre de centaines; ce qui a donné le produit partiel des centaines du multiplicande par le chiffre qui exprime les centaines du multiplicateur.

79. Enfin, en additionnant ces divers produits, on a eu 20,527,532, pour le montant de 37459, pris 0548 fois. En effet, il est évident 1°. qu'on a pris 8 fois le multiplicande par la première opération, puisqu'on l'a multiplié par 8;

2°. que l'ayant multiplié par 4, second chiffre du multiplicateur, on l'a pris 4 fois; mais que comme ce second chiffre exprime 4 dizaines égales à 40 unités, l'on a eu des dizaines pour produit, qui valent dix fois plus que les unités simples; d'où il suit que ce produit qui contiendrait 4 fois le multiplicande, s'il était composé d'unités simples, le contient dix fois plus souvent, étant composé de dizaines, c'est-à-dire, 40 fois; 3°. que l'ayant multiplié par 5, troisième chiffre du multiplicateur, le produit ne contiendrait que 5 fois le multiplicande, si ce produit était composé d'unités simples; mais qu'étant composé de centaines, il contient 100 fois plus souvent le multiplicande, c'est-à-dire 500 fois. Donc, en réunissant ces divers produits, on a eu 20,527,532, qui contient évidemment cinq cent quarante-huit fois le multiplicande, c'est-à-dire autant de fois que le multiplicateur 0548 contient l'unité, conformément au principe (63).

80. Dans la multiplication de deux nombres de plusieurs chiffres, on voit donc :

1°. Que chaque produit partiel a pour facteur le multiplicande, et l'un des chiffres seulement du multiplicateur (78);

2°. Que chaque produit partiel contient le multiplicande autant de fois que le chiffre multiplicateur contient l'unité (79);

3°. Que le produit total n'est que la réunion ou la somme de tous les produits partiels. Cette observation servira.

81. Si le multiplicateur est terminé par des zéro, ou s'il se trouve des zéro parmi les chiffres dont il est composé, il faut écrire au produit un zéro sous chacun de ceux du multiplicateur, parce que le produit d'un zéro du multiplicateur ne peut être que zéro, et parce qu'il suffit d'en écrire un pour conserver aux chiffres du produit suivant le rang qu'ils doivent occuper.

En effet, il est évident que si on avait à multiplier 575

par 300, il ne s'agirait d'autre chose que de multiplier 575 par trois centaines, ou que de prendre 300 fois 575; or, en écrivant un zéro au produit sous celui qui se trouve au rang des unités du multiplicateur, en écrivant également un zéro sous celui qui occupe le rang des dizaines au multiplicateur, ils occupent le rang des unités et des dizaines dans le produit sans rien exprimer en particulier. Enfin, en multipliant ensuite le multiplicande par 3, et en écrivant le premier chiffre de ce dernier produit à la gauche des zéro déjà écrits, il se trouve occuper le rang des centaines qui lui appartient.

EXEMPLE.

575 *multiplicande.*
300 *multiplicateur.*

172500

Également on aurait pu borner l'opération à multiplier par 3, en observant d'ajouter deux zéro à la droite du produit, comme devant être cent fois plus grand que s'il était celui de trois unités simples; et ainsi de suite pour un plus grand nombre de zéro.

2ᵉ. EXEMPLE.

Soit proposé de multiplier 5454 par 3009.

5454 *multiplicande.*
3009 *multiplicateur.*

49086
1636200

16411086

On a d'abord multiplié par 9 pour avoir le produit des unités du multiplicateur. Ensuite le second chiffre du multiplicateur étant un zéro, on a écrit un zéro au rang des di-

zaines, sous le produit précédent, parce que le zéro, qui occupe le rang des dizaines dans le multiplicateur, ne peut donner que zéro pour produit des dizaines (81).

Par les mêmes raisons, le troisième chiffre du multiplicateur étant un zéro, on a écrit un zéro au rang des centaines (81). Enfin on a multiplié par le quatrième chiffre du multiplicateur, et on a écrit le premier chiffre de son produit à la gauche des zéro déjà écrits, où il se trouve occuper le rang des unités de mille qui lui appartient comme étant le produit de trois unités de mille. Donc, de règle générale :

82. *Pour multiplier deux nombres quelconques, il faut multiplier successivement le multiplicande par chacun des chiffres du multiplicateur, à commencer par celui des unités de la plus petite espèce, et plaçer les produits partiels du multiplicande par chacun des chiffres du multiplicateur, les uns au-dessous des autres, en observant d'écrire le premier chiffre à droite du produit des unités du multiplicateur, sous les unités simples du multiplicateur; le premier chiffre du produit des dizaines sous les dizaines; le premier chiffre du produit des centaines sous les centaines, et ainsi de suite pour les autres, ou d'écrire un zéro sous les dizaines, lorsqu'il n'y a qu'un zéro au rang des dizaines du multiplicateur; un zéro sous les centaines, lorsqu'il n'y a qu'un zéro au rang des centaines du multiplicateur, etc., afin que les unités du produit du chiffre suivant se trouvent placées au rang qui leur appartient.*

De quelques-uns des usages de la multiplication.

Entre autres usages dont il sera donné des exemples, la multiplication sert à déterminer le prix de plusieurs objets égaux, lorsqu'on connaît celui d'un de ces objets.

83. Elle sert encore *à réduire* des unités d'une certaine grandeur en unités plus petites, lorsqu'on sait en combien de petites on subdivise l'une des grandes.

Mais en ce cas elle prend le nom de *réduction*.

Des réductions par multiplication.

Par exemple : sachant qu'une centaine vaut 10 dizaines, il est évident que 51 centaines = 51 × 10 dixaines = 510 dizaines.

Multiplier ainsi 10 *dizaines par* 51 *ou* 51 *par* 10, *pour exprimer la valeur de* 51 *centaines par* 510 *dizaines, c'est ce que les arithméticiens appellent réduire des centaines en dizaines, ou faire une* RÉDUCTION.

84. *Les* RÉDUCTIONS *n'ont pour objet que de représenter, par des nombres différens, une quantité qui reste toujours la même.* Car, par exemple, lorsqu'on multiplie 51 centaines par 10, pour les *réduire* en dizaines (83), on ne se propose pas de rendre la quantité représentée plus grande ou plus petite, mais seulement de la représenter par un nombre dix fois plus grand, en lui donnant pour mesure une unité 10 fois plus petite.

Pour RÉDUIRE *un nombre à une unité plus petite que celle qu'il a pour mesure, il ne s'agit que de le multiplier par le nombre des petites unités qui composent celle qui lui sert de mesure* (*a*).

Pour réduire des centaines en dizaines, il faut ajouter un zéro à la droite des centaines (83); cela posé, ayant 51 centaines plus 9 dizaines à réduire en dizaines, il suffit d'ajouter le chiffre 9 à la droite de 51, lè résultat sera 519 dizaines. En effet, ajouter un chiffre à la droite de 51, c'est multiplier ce nombre par 10, lorsque le chiffre ajouté est 0; mais ici, ce chiffre exprimant en particulier 9 dizaines, il est évident que c'est multiplier par 10 et ajouter 9 dizaines au produit, qui se trouve alors composé de 510 dizaines + 9 = 519 dizaines.

(*a*) *Abréviation des réductions en unités, de dix en dix fois plus petites.*

De la preuve de la multiplication.

85. En observant comment on fait la multiplication, on voit comment on peut la défaire, s'il est permis de s'exprimer ainsi; ou, en d'autres termes, en voyant comment on a composé un produit, on voit comment on peut le décomposer.

Ainsi, en voyant que le produit est composé d'autant de fois l'un des deux facteurs qu'il y a d'unités dans l'autre, on voit qu'on peut soustraire l'un des facteurs du produit autant de fois que l'unité est contenue dans l'autre facteur. Par exemple : le résultat de la multiplication de 9 par 6, ou de 6 par 9, n'étant autre chose que la somme de 6 fois 9, ou de 9 fois 6, il est évident que le produit 54 étant exact, on doit pouvoir en soustraire 6 fois 9 ou 9 fois 6. Or il en est nécessairement de même, quels que soient les facteurs et leurs produits. Donc, en général :

86. *Tout produit contenant chacun des facteurs autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre, on doit pouvoir en soustraire l'un des facteurs autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre.*

Et, en opérant cette soustraction, pour savoir combien de fois elle peut avoir lieu, le nombre qui exprime cette quantité de fois doit être composé d'autant d'unités que l'autre facteur, ou plutôt ne doit être autre chose que ce même facteur. Ainsi :

87. Pour faire la preuve d'une multiplication, il ne s'agit que de chercher combien de fois le produit contient l'un des deux facteurs, ce que l'on trouve en retranchant ce facteur du produit, autant de fois qu'il est contenu.

Le nombre qui exprime combien de fois il s'y trouve contenu, étant le même que l'autre facteur, prouve que le produit est exact.

88. De même, en voyant par quels moyens on abrége la

composition du produit d'une multiplication, on voit par quels moyens on peut abréger sa décomposition.

Ainsi, lorsqu'on opère la multiplication de 9 par 548, ou, ce qui revient au même, de 548 par 9 (65), ci.

9			548
548			9
72	produit partiel des unités		4932
36	*idem*	des dizaines.	
45	*idem*	des centaines.	
4932	*produit total.*		

1°. On voit que le produit partiel des centaines, qui a été trouvé le dernier, se présente naturellement le premier, lorsqu'il s'agit de défaire ce que la multiplication a fait; d'où il suit qu'il faut commencer par où la multiplication a fini, c'est-à-dire, par opérer sur la gauche du produit total. Or le produit partiel des centaines, composé de centaines, étant nécessairement contenu tout entier dans les 49 centaines du produit total, exprimées par les deux premiers chiffres de la gauche de ce produit, il est évident que, pour décomposer ce dernier, il faut d'abord soustraire le multiplicande 9 de ces 49 centaines autant de fois qu'il y est contenu;

2°. Mais en voyant que, lorsqu'on multiplie le multiplicande 9 par 5 centaines, et qu'on écrit le produit 45 au rang des centaines, ce produit contient 500 fois le multiplicande (79), on voit que soustraire 5 fois $9 = 45$ des 49 centaines exprimées par les deux premiers chiffres de la gauche du produit tolal, c'est en soustraire le produit partiel des centaines, qui contient 500 fois le multiplicande, ou, en d'autres termes, c'est en soustraire 500 fois le multiplicande; or, 45 étant soustrait de 49 centaines, le reste est 4 centaines, à côté duquel, abaissant le chiffre 3 des

dizaines du produit total, on a 43 dizaines, qui contiennent en entier le produit partiel des dizaines;

3°. De même en voyant que, lorsque l'on multiplie 9 par 4 dizaines, et qu'on écrit le produit 36 au rang des dizaines, il contient 40 fois le multiplicande 9, on voit que retrancher 4 fois 9 = 36, des 43 dizaines ci-dessus, c'est en retrancher le produit partiel des dizaines, c'est-à-dire, c'est en soustraire 40 fois le multiplicande. Or, 36 étant soustrait de 43 dizaines, le reste est 7 dizaines, à côté duquel, abaissant le chiffre 2 des unités du produit total, on a 72 unités, qui contiennent le produit partiel des unités;

4°. Enfin, en voyant que lorsqu'on multiplie 9 par 8 unités le produit est 72 unités, on voit qu'on peut soustraire 8 fois 9 de 72, reste des opérations précédentes, et qu'il ne doit rien rester du produit total, s'il est exact, puisqu'on a achevé de le décomposer en entier, ou, en d'autres termes, d'en soustraire le multiplicande autant de fois qu'il y était contenu.

Il est donc évident qu'en faisant ces opérations, on aura soustrait 548 fois 9 de 4932, c'est-à-dire, autant de fois qu'il y était contenu par le moyen de 3 soustractions abrégées, comme on l'avait additionné 548 fois, par le moyen de 3 additions abrégées; en un mot, qu'on a défait tout ce que la multiplication avait fait, ou décomposé le produit 4932 par les opérations inverses de celles qui ont servi à le composer.

Il en serait de même du produit de toute autre multiplication.

L'opération inverse de la multiplication, c'est-à-dire, par laquelle on soustrait l'un des facteurs d'un produit autant de fois qu'il y est contenu, pour savoir combien de fois il y est contenu, est ce qu'on appelle une *division* (*a*).

(*a*) La division tire son nom des usages auxquels on l'applique le plus souvent.

De la division.

89. *Diviser un nombre entier par un autre, c'est soustraire d'une manière abrégée l'un de l'autre autant de fois qu'il y est contenu, pour savoir combien de fois il y est contenu.* Par exemple, diviser 15 par 5, c'est soutraire 5 de 15 3 fois, pour connaître ce nombre de fois.

Le nombre qu'il s'agit de diviser se nomme *dividende*, celui par lequel on doit diviser se nomme *diviseur*, le résultat de l'opération, c'est-à-dire, le nombre qui indique par la quantité d'unités dont il est composé, combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende s'appelle *quotient*.

Dans l'exemple ci-dessus 15 est le dividende, 5 le diviseur, et 3 le quotient.

Pour parler d'une manière plus générale :

90. *Diviser un nombre entier par un autre, c'est en cher-*

Lorsqu'il s'agit de partager également une certaine quantité d'objets entre une certaine quantité de personnes, il est évident qu'il faut diviser cette quantité d'objets en autant de parties égales qu'il y a de partageans. Par exemple, en supposant que l'on eût 54 aunes de drap à partager entre 6 personnes, il s'agirait de faire 6 parts égales de 54 aunes, afin de donner une de ces parts à chaque personne; mais, pour connaître la quantité d'aunes qui doit composer chaque part, on considère que, s'il ne s'agissait que de partager 6 aunes entre 6 personnes, chacune d'elles aurait une aune, et qu'ainsi chaque personne doit avoir une aune, autant de fois que 6 aunes sont contenues dans 54 aunes; qu'il en résulte que, pour savoir combien elles auront d'aunes chacune, il ne s'agit que de soustraire les 6 aunes de 54, autant de fois qu'elles y sont contenues; et, comme elles y sont contenues 9 fois, on en conclut que la part de chaque personne doit être 9 aunes.

Il est donc évident que cette opération n'est qu'une soustraction abrégée; mais on l'appelle division, parce qu'elle a souvent pour objet de diviser un nombre en plusieurs parties égales; et comme on ne divise un nombre quelconque en plusieurs parties égales, que pour connaître la *quote-part* de chaque partageant, le résultat de la division qui fait connaître cette quote-part s'appelle *quotient*.

cher un troisième appelé quotient qui doit contenir l'unité autant de fois que le diviseur est contenu dans le dividende. Conséquemment :

91. Si on multiplie le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende ; car c'est prendre ce diviseur autant de fois qu'il a été soustrait du dividende ; ou, en d'autres termes, c'est recomposer le dividende.

92. Tout dividende peut être considéré comme le produit d'une multiplication, dont le diviseur est l'un des facteurs, et le quotient l'autre, et réciproquement.

93. Le produit d'une multiplication peut être considéré comme un dividende, l'un des facteurs comme un diviseur, et l'autre comme un quotient.

94. En divisant le produit d'une multiplication par l'un des deux facteurs, on doit trouver l'autre au quotient sans reste, car c'est chercher combien de fois l'un des facteurs est contenu dans le produit. Or, on sait qu'il doit y être contenu autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre facteur ; le quotient, qui marque combien de fois l'un des facteurs est contenu dans le produit, est donc nécessairement composé d'autant d'unités que l'autre facteur, ou plutôt n'est autre chose que ce même facteur.

95. On opère toujours la division des nombres entiers comme celle des nombres abstraits ; en un mot, comme s'il ne s'agissait que de savoir combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende ; mais, lorsque le quotient doit avoir une unité d'une espèce déterminée, par l'énoncé de la question, on donne à cette unité la dénomination indiquée par cet énoncé.

En effet, quelle que soit l'espèce de l'unité du nombre entier qui est le quotient exact de deux autres nombres, il exprime toujours combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende ; on peut donc toujours opérer la division comme s'il ne s'agissait que de savoir combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, sauf à donner ensuite,

à l'unité du quotient, la dénomination indiquée par l'énoncé de la question.

96. L'examen de l'énoncé de la question fait toujours connaître l'espèce de l'unité de quotient. On a vu (95) que les deux termes d'une division et le quotient, peuvent toujours être considérés comme des nombres abstraits; mais, lorsque le quotient doit avoir des unités d'une espèce déterminée, on peut considérer le dividende comme ayant une unité de même espèce que celle qui doit avoir le quotient, et en général:

97. *On peut considérer le dividende comme ayant une unité de telle espèce que l'on voudra*, le quotient sera toujours le même nombre.

En effet, quelle que soit l'espèce de l'unité du dividende, le diviseur y sera toujours contenu le même nombre de fois; d'où il suit que le quotient, qui indique ce nombre de fois, contiendra toujours le même nombre de fois l'unité, ou sera toujours le même nombre.

98. Pour opérer la division, il faut connaître tous les quotiens d'un seul chiffre. Mais, comme on ne peut connaître tous les produits d'un chiffre sans connaître le quotient de chacun de ces produits par l'un des facteurs (94), on a déjà, dans la connaissance de tous les produits d'un chiffre par un chiffre, celle de tous les quotiens d'un seul chiffre.

En effet, lorsqu'on sait que $9 \times 9 = 81$, on sait qu'en 81 il y a 9 fois 9; de même, lorsqu'on sait que $8 \times 7 = 56$, on sait qu'en 56 il y a 8 fois 7, ou 7 fois 8, et ainsi de suite.

99. Et observons, avant de passer outre, que l'on peut exprimer ou indiquer plus brièvement les divisions à opérer en plaçant le diviseur sous le dividende, et en les séparant par ce trait — qui exprime ces mots *divisé par*. Ainsi: $\frac{81}{9} = 9$; $\frac{56}{8} = 7$; $\frac{21}{7} = 3$; signifiera désormais que 81 divisé par 9 est égal à 9; que 56 divisé par 8 est égal à 7; et que 21 divisé par 7 est égal à 3; et $\frac{81}{9}$, $\frac{56}{8}$; $\frac{21}{7}$, etc., ne seront que des

divisions indiquées, savoir de 81 par 9, de 56 par 8, de 21 par 7, et ainsi de suite.

100. Également, lorsqu'on sait que tout dividende peut être considéré comme un produit dont le diviseur et le quotient sont les facteurs (92), et que tout produit d'une multiplication par un seul chiffre ne peut avoir au-delà d'un chiffre de plus que le multiplicande (77), on voit que quand le dividende a *deux*, *trois*, ou *quatre* chiffres de plus que le diviseur, etc., il peut être considéré comme le produit d'une multiplication dans laquelle le multiplicateur était composé de plusieurs chiffres; que le produit partiel de chacun des chiffres du multiplicateur (78) peut être pris pour dividende partiel, et qu'en divisant chacun de ces produits partiels par le multiplicande, on ne peut avoir qu'un chiffre au quotient (80); qu'ainsi, pour avoir le premier dividende partiel, on peut prendre d'abord sur la gauche du dividende un nombre de chiffres égal à celui des chiffres du diviseur, si ce dernier y est contenu, ou un chiffre de plus s'il n'y est pas contenu (77); parce qu'en supposant que ces chiffres expriment un nombre de centaines, ce nombre contient le produit partiel des centaines (78); qu'on peut prendre ensuite successivement, pour dividende partiel, le produit partiel des dizaines, pui celui des unités qui font chacun partie du produit total: et ainsi de suite, si ce dernier est composé d'un plus grand nombre de produits partiels; et qu'en cherchant successivement le quotient d'un seul chiffre de chacun de ces dividendes partiels, on peut faire par le moyen de plusieurs divisions ce qu'on ne peut faire en une, et que le quotient ne doit être que la réunion de différens quotiens partiels.

Il est donc évident que toute la difficulté de la division consiste uniquement à savoir trouver le quotient d'un seul chiffre de chaque dividende partiel, et qu'on a déjà, dans les connaissances nécessaires pour faire une multiplication, toutes celles nécessaires pour opérer une division.

Manière d'opérer la division par un nombre d'un seul chiffre.

101. Soit proposé de diviser 4,932 par 9, séparez le diviseur du dividende par un trait, et tirez-en un autre sous le diviseur afin d'en séparer le quotient ainsi.

Dividende	4932	9	diviseur.
	43	548	quotient.
	72		
	0		

Pour avoir le premier dividende (88) partiel, prenez à la gauche du dividende un nombre de chiffres égal à ceux qui composent le diviseur, et dans le cas où le diviseur ne serait pas contenu dans ce nombre de chiffres, prenez-en un de plus. Conséquemment prenez les 49 centaines de la gauche du dividende, et pour avoir le premier quotient partiel, cherchez combien de fois le diviseur est contenu dans 49, considéré comme un nombre d'unités simples, en disant : en 49, combien y a-t-il de fois 9 ? 5 fois plus le reste 4, car $9 \times 5 + 4 = 49$. Écrivez alors le quotient 5 sous le diviseur, multipliez ce diviseur par le quotient 5, ce qui produit 45; retranchez 45 de 49, et écrivez le reste 4 centaines sous les unités de 49 (88), ou au rang des centaines; par ce moyen, vous aurez divisé le produit des centaines par 9, vous aurez trouvé le quotient des centaines par 9, qui est 5 centaines, et vous aurez déterminé le reste des centaines qui est 4. Cela fait, l'opération est entièrement terminée quant aux centaines, ou, en d'autres termes, quant au premier dividende partiel. Il ne reste qu'à en faire une parfaitement semblable sur le produit des dizaines. Bien entendre cette première, c'est entendre parfaitement les suivantes, qui n'en sont qu'une répétition.

Pour avoir le produit partiel des dizaines qui doit servir

de second dividende partiel, descendez, à côté du reste 4 centaines, les 3 dizaines du dividende total, vous aurez alors 43 dizaines = 4 centaines + 3 dizaines, et divisez ces 43 dizaines par 9, comme vous avez divisé précédemment les centaines, en disant, pour avoir le second quotient partiel : en 43 combien y a-t-il de fois 9? 4 fois plus un reste; écrivez alors le quotient 4 dizaines à la droite du précédent, comme exprimant des unités dix fois plus petites que celles exprimées par le chiffre précédent; multipliez 9 par 4, ce qui produira 36; ôtez 36 de 43, et écrivez le reste 7 sous les unités de 43, c'est-à-dire, au rang des dizaines; cela fait, l'opération est entièrement finie, quant aux dizaines, et il ne reste plus qu'à en faire une parfaitement semblable sur le produit des unités. Enfin descendez à côté du reste 7 dizaines les unités simples du produit total, vous aurez alors 72, produit partiel des unités simples, qui sera le troisième dividende partiel. Divisez ce dernier par 9, et vous aurez 8 pour quotient partiel des unités simples; écrivez alors 8 au quotient à la droite des chiffres précédens; multipliez 9 par 8, ce qui produira 72, et retranchez 72 de 72, dernière partie du dividende, le reste sera 0; le quotient total sera donc 548 sans reste.

On a donc évidemment soustrait le diviseur 548 fois du produit total (88).

Manière d'opérer la division par un nombre composé de plusieurs chiffres.

102. Soit proposé de diviser 26,160 par 545.

Opération.

26160	545
4360	48
000	

Pour avoir le premier dividende partiel, prenez sur la

gauche du dividende autant de chiffres qu'il y en faut pour que le diviseur y soit contenu (101); ainsi prenez les 4 premiers chiffres de la gauche, puisque le diviseur n'est pas contenu dans les 3 premiers, vous aurez 2616 pour premier dividende partiel; cherchez ensuite combien de fois le diviseur est contenu dans ce dividende.

Mais on ne peut apercevoir tout à coup combien de fois 545 est contenu dans 2616, et en général on éprouve toujours la même difficulté lorsqu'il s'agit de découvrir combien de fois un diviseur, composé de plusieurs chiffres, est contenu dans le dividende partiel.

Pour le découvrir par le moyen le plus court, cherchez seulement combien de fois le premier chiffre de la gauche du diviseur est contenu dans le premier chiffre de la gauche du dividende, ou dans les deux premiers, si le premier ne suffit pas; cherchez ensuite si le second chiffre du diviseur est contenu autant de fois dans le chiffre suivant du dividende ajouté au reste de l'épreuve précédente. Par exemple: pour découvrir combien de fois 545 est contenu dans 2616, dites: en 26 combien y a-t-il de fois 5? il y est 5 fois; or, $5 \times 5 = 25$ qui peut être en effet soustrait de 26, et il reste 1 qui vaut 10 unités de la même espèce que celles exprimées par le chiffre suivant à droite de 2616; ajoutez ce reste 10 au chiffre suivant à droite, ce qui fait 11, et voyez si le second chiffre du diviseur est aussi contenu 5 fois dans 11; or il est évident que ce second chiffre étant 4, n'est pas contenu 5 fois dans 11; concluez-en que le diviseur ne peut pas être contenu 5 fois dans 2616, mais qu'il peut y être contenu 4 fois (*a*). Et observons ici que si

(*a*) Cette épreuve n'ayant pour but que de découvrir combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende partiel, on sent qu'il ne faut rien écrire pendant sa durée. Chercher combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende partiel, pour savoir quel est le chiffre que l'on doit porter au quotient, c'est tout ce qu'on se propose.

le second chiffre du diviseur avait été 2 au lieu d'être 4; en un mot, que s'il avait pu être contenu 5 fois dans 11, vous en auriez conclu que tous les chiffres du diviseur étaient contenus 5 fois dans 2616, et qu'il fallait porter 5 au quotient, quoique cela ne soit pas toujours vrai. Mais, comme cette épreuve donne le vrai quotient la plupart du temps, et que les opérations suivantes, en prouvant que le quotient trouvé par le moyen de cette épreuve est faux ou exact, assurent qu'elle ne peut pas induire en erreur, on peut s'y tenir.

Après avoir reconnu par ce moyen que le diviseur est contenu 4 fois dans 2616, écrivez 4 au quotient, multipliez successivement tous les chiffres du diviseur par 4, selon la règle établie pour la multiplication (74); et, à mesure que vous trouverez chaque produit partiel, retranchez-le des parties correspondantes de 2616 ou du dividende partiel, considéré comme un nombre d'unités simples.

Ainsi, multipliez d'abord les 5 unités du diviseur par 4, ce qui produit 20; et, comme vous ne pourrez ôter 20 des 6 unités simples de 2616, empruntez deux dizaines sur le chiffre suivant de ce dividende partiel, qui, avec les unités simples, font 26 unités; retranchez 20 de 26, et écrivez le reste 6 sous les unités de 2616.

Pour tenir compte des deux dizaines empruntées dans l'opération précédente, retenez-les et ajoutez-les au produit suivant; ainsi, en continuant la multiplication des chiffres du diviseur par 4, dites : 4 fois 4 font 16, et 2 dizaines de retenu font 18. Comme vous ne pouvez ôter 18 de 1 dizaine

---

Or, lorsque le premier et le second chiffre du diviseur sont contenus une certaine quantité de fois dans les parties correspondantes de la gauche du dividende, avec un reste d'une certaine grandeur, il est rare que tous les chiffres suivans du diviseur ne soient pas contenus dans les parties correspondantes du dividende, de quelque nombre de chiffres qu'ils soient composés l'un et l'autre.

du dividende partiel, empruntez 2 centaines sur le chiffre suivant, qui, avec la dizaine du dividende, composent un nombre de 21 dizaines; retranchez 18 de 21, et écrivez le reste 3 sous les dizaines du dividende; par là vous aurez tenu compte des deux dizaines empruntées dans l'opération précédente, et vous tiendrez compte de la même manière des deux centaines que vous venez d'emprunter. Continuez donc la multiplication des chiffres du diviseur par le quotient, en disant : 4 fois 5 font 20 centaines, et 2 empruntées dans l'opération précédente font 22, ôtez 22 de 26, et écrivez le reste 4 sous les centaines de 2616; la division de ce premier dividende partiel sera achevée, et le reste sera 436.

Abaissez à côté du reste 436 le chiffre suivant du dividende total, c'est-à-dire, le zéro qui se trouve à la suite des chiffres que vous avez déjà pris pour premier dividende partiel, vous aurez alors 4360 pour second dividende partiel, sur lequel il faut opérer comme sur le précédent.

Pour diviser 4360 par 548, cherchez donc d'abord, par l'épreuve déjà indiquée, combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende (102); ayant estimé par cette épreuve que le second dividende partiel ne peut contenir que 8 fois le diviseur, écrivez 8 au quotient à la droite du chiffre précédent; multipliez par ce nouveau quotient à la droite du chiffre précédent; multipliez par ce nouveau quotient tous les chiffres du diviseur, à commencer par celui des unités, retranchez chaque produit, à mesure que vous le trouverez, des parties correspondantes du second dividende partiel, de la même manière que dans l'opération précédente. Ainsi dites : 8 fois 5 font 40, qui ne peut être soustrait du zéro qui occupe la place des unités dans le deuxième dividende partiel; empruntez sur le chiffre suivant 4 dizaines égales à 40 unités, qui, étant soustraites de 40, auront pour reste zéro. Écrivez zéro sous les unités du second dividende, et retenez les quatres dizaines empruntées pour les ajouter au produit suivant. Dites ensuite : 8 fois les 4 dizaines du diviseur

et 4 empruntées font 36 dizaines, qu'il faut soustraire de 36 (composé des 6 dizaines du second dividende et de 3 centaines empruntées sur le chiffre suivant); écrivez le reste zéro sous les dizaines du second dividende, et retenez les trois centaines empruntées. Dites enfin : 8 fois les 5 centaines du diviseur font 40, et 3 empruntées font 43; ôtez les 43 des centaines du second dividende, et écrivez le reste zéro au-dessous.

La division est achevée, et le quotient de 26160 par 545 est 48 sans reste.

103. Il peut arriver que l'un des quotiens que l'on trouve par le moyen de l'épreuve indiquée (102) soit trop fort; mais en ce cas le produit du diviseur par ce quotient ne pourra pas être soustrait du dividende sur lequel on opère, ce qui avertira qu'il faut diminuer le quotient d'une ou de deux unités, etc., et recommencer l'opération, par la raison que le diviseur est contenu une ou deux fois, etc., de moins qu'on ne l'avait cru dans ce dividende.

104. Il peut arriver au contraire que le quotient que l'on trouve par le moyen de cette épreuve soit trop faible; mais en ce cas le produit du diviseur par ce quotient étant soustrait du dividende sur lequel on opère, on aura un reste plus fort que le diviseur, ce qui avertira qu'il faut augmenter le quotient d'une ou de deux unités, et recommencer l'opération par la raison que le diviseur étant contenu une ou deux fois, etc., dans le reste de ce dividende, était contenu une ou deux fois, etc., de plus qu'on ne l'avait cru dans le reste de ce même dividende; d'où il suit qu'en général :

105. *Le reste de chaque division doit être plus petit que le diviseur.*

106. Enfin il peut arriver que, faute d'avoir remarqué que le reste de l'un des dividendes partiels est plus fort que le diviseur (105), celui sur lequel on opère ensuite contienne plus de 9 fois le diviseur; mais, comme chaque dividende partiel ne peut avoir plus d'un chiffre au quotient, auquel on ne

doit par conséquent jamais mettre plus de 9 (100 et 108), cela avertira que le quotient est trop faible, qu'il faut l'augmenter d'une ou de deux unités, et recommencer la division du précédent dividende. En effet, si l'on pouvait mettre seulement 10 au quotient actuel, la dizaine qu'on trouverait dans ce dernier appartiendrait évidemment au précédent, d'où il suit qu'en géneral :

107. Dans la division de tout dividende partiel, il ne faut jamais mettre plus de 9 au quotient (133).

Au reste on acquiert en peu de temps l'usage de prévoir de combien il faut augmenter ou diminuer le quotient que l'on trouve par l'épreuve déjà indiquée.

3e. Exemple.

Soit proposé de diviser 4932 par 548.

Opération.

4932	548.
000	9

Prenez d'abord à la gauche du dividende autant de chiffres qu'il en faut pour contenir le diviseur (101); ainsi prenez tous les chiffres de 4932, puisque les 3 premiers chiffres de la gauche ne peuvent contenir 548.

Cherchez ensuite combien de fois les deux premiers chiffres du diviseur sont contenus dans les parties correspondantes du dividende (102).

Après avoir reconnu (102) que le diviseur est contenu 9 fois dans le dividende, écrivez 9 au quotient, multipliez successivement tous les chiffres du diviseur par 9, et retranchez chaque produit partiel, à mesure que vous le trouverez, des parties correspondantes du dividende, par le moyen déjà indiqué (102); le reste de chaque soustraction étant 0, le quotient sera 9 sans reste, ou le quotient exact sera 9.

108. Observons, avant de passer outre, que le nombre 493, représenté par les 3 premiers chiffres du dividende

4932, n'est que dix fois plus grand avec le chiffre suivant (28); le diviseur 548 n'étant pas contenu une fois dans 493, ne peut donc pas y être contenu 10 fois dans 4932; il ne peut donc y être contenu tout au plus que 9 fois, d'ou il suit évidemment qu'on ne peut avoir qu'un chiffre au quotient, et il en est de même de tout autre nombre. On peut donc en conclure qu'en général :

109. *Un dividende, dont tous les chiffres sont nécessaires pour que le diviseur y soit contenu, et qui a un chiffre de plus que ce même diviseur, ne peut contenir ce dernier tout au plus que 9 fois.* D'où il suit qu'on ne peut avoir qu'un chiffre au quotient (108).

4e. Exemple.

110. Soit proposé de diviser le nombre 20,527,532 par 37459, dont l'un est le produit et l'autre le multiplicande de la multiplication du n°. (78).

Dividende	20,527532	37459	*diviseur*
	1,79803	548	*quotient*
	299672		
	00000		

Pour faire cette opération, prenez d'abord 6 chiffres à la gauche du dividende, et placez un point sous le premier de ces six chiffres à droite, pour les distinguer des suivans; ces six chiffres qui sont : 205275 seront votre premier dividende partiel.

Ensuite pour diviser 205275 par 37459, ou pour avoir le premier quotient partiel, cherchez combien de fois le premier chiffre de la gauche du diviseur est contenu dans les deux premiers de la gauche du dividende, etc. (102).

Ayant reconnu par cette épreuve que le premier dividende partiel, considéré comme un nombre d'unités simples, ne peut contenir que cinq fois le diviseur, portez 5 au quotient

à la droite du chiffre précédent, et multipliez par le nouveau quotient 5 chaque chiffre du diviseur, à commencer par le premier à droite, et retranchez chaque produit, à mesure que vous le trouverez, des parties correspondantes du diviseur partiel (102), et écrivez chaque reste partiel au-dessous des parties correspondantes du dividende.

Le reste, dont toutes les parties auront été trouvées successivement, sera 17980, à côté duquel il faut abaisser les 3 dizaines du dividende, ce qui donnera 179803 pour second dividende partiel, qu'il faut diviser par le diviseur de la même manière qne le précédent; le reste sera 29967.

Abaissez à côté du reste 29967, le premier chiffre 2 de la droite du dividende, ce qui donne pour dernier dividende partiel 299672; divisez-le comme le précédent, le reste sera zéro; le quotient sera donc 548.

111. Or on a déjà vu que le nombre de chiffres pris pour premier dividende partiel, à la gauche du dividende, étant divisé par ce dernier, ne doit avoir qu'un chiffre au quotient (109).

Conséquemment, chacun des chiffres suivans de la droite du dividende, abaissé successivement à côté du reste de l'opération précédente, est un nouveau dividende partiel, qui, étant divisé par le diviseur, ne peut avoir avoir qu'un chiffre au quotient (107).

Donc, de règle générale,

112. *On doit avoir un chiffre au quotient, en divisant par le diviseur les premiers chiffres pris à la gauche du dividende, et on doit avoir ensuite un chiffre au quotient pour chaque chiffre que l'on abaisse à côté du reste de l'opération précédente.*

113. Dans le cours de la division, après avoir abaissé l'un des chiffres du dividende à côté du reste de l'opération précédente, afin d'avoir un nouveau dividende partiel, il peut arriver que ce dernier ne contienne pas le diviseur; dans ce cas, il faut écrire un zéro au quotient, tant pour marquer

que ce dividende ne contient aucune fois le diviseur, qu'afin que tous les autres chiffres du quotient se trouvent placés au rang qu'ils doivent occuper; il faut ensuite considérer ce produit partiel comme un reste de division, abaisser un autre chiffre à côté pour avoir un nouveau dividende partiel, et continuer l'opération.

Enfin, si, en abaisssant successivement plusieurs chiffres, le dividende partiel ne contenait pas le diviseur, il faudrait écrire un zéro au quotient pour chaque chiffre abaissé successivement.

5e. Exemple.

Soit proposé de diviser 172500 par 575, qui sont le produit et le multiplicande de l'opération faite au n°. (81).

Dividende	172500	575	*diviseur*
	00000	300	*quotient*

Après avoir pris à gauche du dividende le nombre de chiffres suffisant, reconnu par le moyen déjà indiqué (102) que le diviseur y est contenu 3 fois, placez 3 au quotient, multipliez le diviseur par 3, et retranchez du dividende chaque produit partiel, à mesure que vous le trouverez (102); le reste sera une suite de zéro.

A côté de ce reste composé de zéro, abaissez le zéro qui occupe le rang des dizaines à la droite du dividende, vous aurez pour dividende partiel une suite de zéro dans laquelle le diviseur n'est pas contenu; placez alors un zéro au quotient, abaissez encore le dernier zéro de la droite du dividende à côté de la suite de zéro qui ont servi de deuxième dividende partiel, vous aurez une nouvelle suite de zéro pour troisième dividende partiel, dans laquelle le diviseur n'est pas contenu; placez alors un autre zéro au quotient, et l'opération est finie : le quotient est exactement 300 sans reste.

6e. Exemple.

Soit proposé de diviser 16,411,086 par 5454. Voyez la seconde multiplication du n°. (81).

Dividende	16411086	5454 *diviseur.*
	0049086	3009 *quotient.*
	0000	

Après avoir pris 5 chiffres au quotient pour avoir le premier dividende partiel, et reconnu que le diviseur doit y être contenu 3 fois, placez 3 au quotient, et opérez de la manière déjà indiquée (102); le reste sera 49.

Abaissez à côté de ce reste le zéro placé à la droite du premier dividende partiel, et écrivez, si vous voulez, un point sous ce zéro, pour vous rappeler qu'il a été descendu, vous aurez 490 pour second dividende partiel, dans lequel le diviseur n'est pas contenu; écrivez alors zéro au quotient, et considérez 490 comme le reste du deuxième dividende partiel.

Abaissez à côté du reste 490 les 8 dixaines du dividende, vous aurez alors 4908 pour troisième dividende partiel qui ne contient pas non plus le diviseur; écrivez alors zéro au quotient, et considérez 4908 comme le reste du troisième dividende partiel.

Abaissez les 6 unités du dividende à côté de ce reste, vous aurez enfin 49086 pour dernier dividende partiel.

Alors, après avoir reconnu (102) que le diviseur y est contenu 9 fois, placez 9 au quotient, multipliez par 9 tous les chiffres du diviseur, retranchez du dernier dividende partiel, tous les produits partiels, à mesure que vous les trouverez, le reste sera 0; la division sera finie, et le quotient total sera 3009.

En résumant tout ce qui concerne la division de deux nombres quelconques, elle peut être réduite à la règle suivante :

114. *Pour diviser un nombre par un autre* (89), *on prend, sur la gauche du dividende, autant de chiffres qu'il en faut pour contenir le diviseur; on cherche combien de fois le premier chiffre du diviseur est contenu dans le premier ou dans les deux premiers de la gauche du dividende partiel, pour en connaître le quotient partiel, que l'on écrit au quotient sous le diviseur; on multiplie le diviseur par ce premier quotient partiel, et on soustrait chaque produit d'un chiffre par un chiffre, à mesure qu'on le trouve, des parties correspondantes du premier dividende partiel, considéré comme un nombre d'unités simples; à côté du reste, on abaisse le chiffre suivant du dividende, ce qui donne un second dividende partiel; on cherche, comme dans l'opération précédente, combien de fois le diviseur y est contenu; on écrit au quotient le nombre trouvé, par lequel on multiplie successivement tous les chiffres du diviseur dont on retranche les produits, à mesure qu'on les trouve, des parties correspondantes du dividende partiel; on abaisse à côté du reste le chiffre suivant du dividende, ce qui donne le troisième dividende partiel, sur lequel il faut opérer comme sur les précédens, et on continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait abaissé tous les chiffres du dividende proposé. Lorsqu'il arrive qu'un dividende partiel ne contient pas le diviseur, il faut, avant d'abaisser un nouveau chiffre, écrire un zéro au quotient. Lorsque le reste d'une opération contient le diviseur, on la recommence, après avoir augmenté le quotient d'une ou deux unités, etc., succesivement* (104); *ou si, au contraire, le produit du diviseur par l'un des quotiens partiels est trop fort pour être soustrait du dividende partiel dont il est le résultat, il faut diminuer ce quotient d'une ou deux unités successivement, et recommencer l'opération.*

115. Dans le cas où on éprouverait quelque difficulté à soustraire, de chaque dividende partiel, les produits partiels de tous les chiffres du diviseur par chaque quotient partiel, on peut rendre l'opération plus facile en la faisant d'une

manière un peu plus longue, voici comme l'on s'y prend :

On écrit, sous le premier dividende partiel, le produit du diviseur par le premier chiffre du quotient, et on retranche ce produit du premier dividende partiel ; puis on abaisse à côté du reste le chiffre suivant du dividende ; on écrit encore le produit du diviseur par le second chiffre du quotient sous ce second dividende partiel, et, après l'en avoir retranché, on abaisse à côté du reste le chiffre suivant du dividende, et ainsi de suite. En un mot, toute la différence consiste seulement en ce que l'on écrit le produit tout entier du diviseur par chaque chiffre du quotient sous chaque dividende partiel, et en ce qu'on soustrait ensuite de chaque dividende chaque produit, sous lequel on écrit le reste qui en dépend. On abaisse d'ailleurs successivement, à côté de chaque reste, l'un des chiffres du dividende, et on opère d'après les mêmes principes que ceux qui sont déjà établis.

Des différentes expressions par lesquelles on désigne la multiplication et la division.

116. On sait que multiplier un nombre par 2, c'est *le doubler* ou le rendre *deux fois plus grand ;* que le multiplier par 3, c'est *le tripler* ou le rendre 3 *fois plus grand ;* que le multiplier par 4, c'est *le quadrupler* ou le rendre 4 *fois plus grand*, etc.

Ces expressions *multiplier* par 2, par 3 ou par 4, etc. ; ou celles-ci : *doubler, tripler, quadrupler*, etc. ; ou celles-ci encore : rendre un nombre 2 *fois*, 3 *fois ou* 4 *fois*, etc., *plus grand*, signifient toutes la multiplication par 2, par 3, par 4, etc., et réciproquement.

117. Ces expressions *diviser* par 2, par 3, par 4, par 5, etc. ; ou celles-ci : prendre la *moitié*, le *tiers*, le *quart*, le *cinquième*, etc. ; ou celles-ci encore : rendre une quantité deux fois, trois fois, quatre fois, plus petite, etc., signifient toutes la division par 2, par 3, par 4, par 5, et ainsi de suite.

Cependant il n'est pas indifférent que l'on se serve de l'une ou de l'autre; car ce qu'on n'expliquerait qu'avec beaucoup de difficulté en se servant de l'une, paraîtrait d'une extrême simplicité lorsqu'on se servira de l'autre.

De quelques-uns des usages de la division.

118. Entre autres usages dont il sera donné des exemples, la division sert à déterminer le prix d'un objet lorsqu'on connaît celui d'un nombre quelconque d'objets semblables, ou à déterminer la part qui revient à une personne d'une somme ou d'une quantité quelconque d'objets qui doit être partagée par portions égales entre plusieurs personnes, ou à RÉDUIRE des unités d'une certaine petitesse en unités plus grandes, *lorsqu'on connaît la quantité des petites qui en composent une grande.*

Des réductions par division.

119. *On peut, sans changer la quantité exprimée par un nombre, le réduire à une unité plus grande ou d'un ordre supérieur, en le divisant par la quantité d'unités de l'espèce de celle qu'il a pour mesure, qui compose celle qu'on veut lui donner pour mesure nouvelle.* Par exemple : ayant 570 dixièmes à réduire en unités, et sachant que l'unité vaut 10 dixièmes, il est évident que le nombre 570 dixièmes vaut autant de fois l'unité qu'il contient de fois 10 dixièmes, et qu'ainsi il faut le diviser par 10 pour le réduire en unités. Il ne s'agit donc que de le diviser par 10, en retranchant un zéro de sa droite; le résultat sera 57 unités.

De même ayant 5700 centièmes, et sachant que 100 centièmes valent une unité, pour réduire en unités il faut diviser 5700 par 100, en retranchant deux zéro de la droite de 5700, le résultat sera 57 unités = 5700 centièmes

De la preuve de la multiplication et de la division.

La multiplication et la division se servent réciproquement de preuve.

120. Pour faire la preuve d'une division, il faut multiplier le diviseur par le quotient (91), le produit sera le dividende.

121. Pour faire celle d'une multiplication, il faut diviser le produit par l'un de ses facteurs, on trouvera l'autre facteur au quotient (94).

Des changemens que l'on peut faire au produit d'une multiplication en les opérant sur les facteurs, et de ceux que l'on peut faire aux facteurs sans en changer le produit.

122. Ayant à multiplier 9 par 4, par exemple, dont le produit est 36, si on multipliait préalablement le multiplicateur 4 par 2, on aurait 8 pour multiplicateur; et en multipliant ensuite 9 par 8, le produit serait 72, double de 36. Ainsi :

123. Multiplier le multiplicateur par 2, c'est multiplier le produit par 2. Par les mêmes raisons, multiplier le multiplicateur par 3, par 4 ou par 5, etc., c'est multiplier le produit par 3, par 4 ou par 5, etc., et réciproquement.

124. Diviser le multiplicateur par 2, par 3, par 4 ou par 5, etc., c'est diviser le produit par 2, par 3, par 4 ou par 5, etc.

Or, tout ce qui est dit du multiplicateur s'applique au multiplicande, qui peut être pris pour multiplicateur, et réciproquement (65). Donc, en général :

125. *Multiplier* (123) *ou diviser* (124) *l'un des facteurs par un nombre quelconque, c'est multiplier ou diviser le produit par ce même nombre.*

126. Multiplier chacun des deux facteurs par 3, par ex., c'est multiplier le produit par 3 × 3 ou par 9; car il a évidemment été multiplié par 3 lorsqu'on a multiplié l'un des deux facteurs par 3; or, un nombre ainsi multiplié l'étant encore une seconde fois par 3, lorsqu'on multiplie aussi l'autre facteur par 3, doit nécessairement être 3 fois multi-

même nombre reste évidemment la même. Car, par ex., ayant 6 à multiplier et à diviser par 3, ce que l'on peut exprimer ainsi : $\frac{3}{6 \times 3}$, il est évident, au premier coup d'œil, que 6 étant multiplié par 3, le produit sera $18 = 6 \times 3$; ensuite que ce produit, étant divisé par l'un de ses facteurs 3, on trouvera l'autre facteur 6 au quotient (94); et il en serait de même quels que fussent les nombres pris pour exemple. D'où résulte encore cette règle générale :

133. *Tout nombre qui est multiplié et divisé par un même nombre reste le même.*

134. Le produit de plusieurs nombres sera le même dans quelque ordre qu'on le multiplie (211).

Des divers changemens que l'on peut faire subir au quotient d'une division, en les opérant sur le diviseur et le dividende, et des changemens que l'on peut faire subir au diviseur et au dividende sans rien changer au quotient.

135. Ayant à diviser 36 par 9, par exemple, dont le quotient est 4, si on multipliait préalablement 36 par 2, on aurait 72 pour dividende; or, en divisant ensuite 72 par 9, le quotient serait 8, double de 4. Ainsi :

Multiplier le dividende par 2, c'est multiplier le quotient par 2; par les mêmes raisons, multiplier le dividende par 3, par 4, par 5, etc., c'est multiplier le quotient par 3, par 4, par 5, etc., et réciproquement.

136. Diviser le dividende par 2, par 3, par 4, par 5, etc., c'est diviser le quotient par 2, par 3, par 4.

137. Multiplier ou diviser le dividende par un nombre quelconque, c'est multiplier ou diviser le quotient par ce même nombre.

Il n'en est pas de même lorsqu'on multiplie ou divise le diviseur.

138. Ayant à diviser 72 par 9, par exemple, dont le quotient est 8, si on multiplie préalablement le diviseur, par ex.,

par 2, on aura 18 pour nouveau diviseur; or, en divisant ensuite 72 par 18, le quotient sera 4, moitié de 8. Ainsi :

Multiplier le diviseur par 2, c'est diviser le quotient par 2;

Par les mêmes raisons, multiplier le diviseur par 3, par 4, par 5, etc., c'est diviser le quotient par 3, par 4, par 5, etc., ainsi :

139. *Multiplier le diviseur par un nombre quelconque, c'est diviser le quotient par ce même nombre, et réciproquement.*

140. *Diviser le diviseur par un nombre quelconque, c'est multiplier le quotient par ce même nombre.*

141. Enfin, multiplier ou diviser le dividende et le diviseur par un même nombre, c'est multiplier et diviser le quotient par un même nombre, ce qui ne change rien au quotient (133).

D'où il résulte qu'en général :

142. 1°. *On peut multiplier ou diviser les deux termes d'une division par un même nombre, sans rien changer au quotient;*

2°. *Et par conséquent ôter et de l'un et de l'autre autant de zéro qu'il s'en trouve à la droite de celui qui en contient le moins;*

3°. On encore prendre sur l'un et l'autre des parties égales, autant de fois que cela est possible sans reste. Savoir : la moitié, par exemple, sur le dividende et le diviseur; puis encore la moitié sur le dividende et le diviseur résultant des deux opérations précédentes, et ainsi de suite.

143. Lorsque ces opérations préalables réduiront le diviseur à l'unité, le quotient sera égal au dividende.

Par exemple : ayant 2400 à diviser par 100; en supprimant deux zéro à l'un et l'autre de ces deux nombres, on aura 24 à diviser par 1, et 24 pour quotient. De même, par exemple, ayant 192 à diviser par 8, en prenant la moitié de ces deux nombres, on aura 96 à diviser par 4; puis en prenant la moitié de ces deux nombres 96 et 4, on aura 48 à diviser par 2;

et enfin, en prenant la moitié de ces deux derniers nombres, on aura 24 à diviser par 1, et 24 pour quotient, c'est-à-dire, on aura un quotient égal au dividende; or, il en serait de même quel que fût le dividende. Donc, en général :

144. *Un nombre quelconque, divisé par l'unité, reste le même, ou n'a d'autre quotient que lui-même.*

Des opérations de calcul sur les décimales.

Les quatre opérations de l'arithmétique sur des nombres exprimant des décimales, ou sur des nombres entiers accompagnés des parties décimales, doivent être ramenées aux quatre opérations de l'arithmétique sur les nombres entiers.

De l'addition des décimales.

145. On additionne les parties décimales de la même manière que les nombres entiers, parce que les chiffres qui représentent des décimales représentent des unités qui sont de 10 en 10 fois plus petites, en rétrogradant de la gauche vers la droite; et de 10 en 10 fois plus grandes, en avançant de la droite vers la gauche, comme les chiffres qui représentent des entiers.

Ainsi, si on propose d'additionner 7 mètres 789 millièmes, avec 5 mètres 98 centièmes, avec 7 mètres 5 dixièmes, 2 mètres 006 millièmes, 3 mètres 0007 dix millièmes, et 0,0009 dix millièmes, écrivez ces nombres les uns sous les autres, suivant la règle établie (49), et comme suit :

EXEMPLE.

	Mètres.
	7,789
	5,98
	7,5
	2,006
	3,0007
	0,0009
Somme	26,2766

Ces nombres étant ainsi disposés, commencez l'addition par les unités de la plus petite espèce (50), c'est-à-dire, par celles qui composent la première colonne de la droite, en disant : $7 + 9 = 16$; cela fait, posez 6 sous les dix millièmes et retenez 1 (50); passez ensuite à l'addition des millièmes, en disant : 1 millième retenu $+ 9 = 10$, $10 + 6 = 16$, posez 6 sous les millièmes et retenez 1 (38); passez ensuite à l'addition des centièmes, en disant : 1 centieme retenu $+ 8 = 9$, $9 + 8 = 17$, posez 7 sous les centièmes et retenez 1 (38); passez ensuite à l'addition des dixièmes, en disant : 1 dixième de retenu $+ 7 = 8$, $8 + 9 = 17$, $17 + 5 = 22$, posez 2 sous les dixièmes, en observant de placer une virgule à la gauche de ce chiffre, pour le distinguer de ceux qui représenteront des entiers (38) et retenez 2; enfin faites également l'addition des entiers, en disant : 2 mètres retenus $+ 7 = 9$, $9 + 5 = 14$, $14 + 7 = 21$, $21 + 2 = 23$, $23 + 3 = 26$, posez 6 sous les unités, et avancez 2 à gauche au rang des dizaines, et la somme totale est 26,2766 mètres. Il en est de même de toutes les autres additions des nombres entiers, accompagnés des parties décimales.

De la soustraction des décimales.

146. La soustraction des nombres qui représentent des parties décimales, se fait exactement de la même manière que celle des nombres entiers, parce que ces parties ont entre elles les mêmes rapports que les unités, dizaines, centaines (38), etc.

Par exemple, si on proposait de soustraire 5,579 millièmes de 13,3809 dix millièmes, écrivez le plus petit de ces deux nombres sous le plus grand, suivant la règle établie (57), et comme suit :

EXEMPLE.

13,3809	
5,579	
7,8019	reste.

Ainsi, la place des dix millièmes étant vide dans le nombre inférieur, dites : $9 - 0 = 9$, et écrivez le reste 9 sous les dix millièmes; passez à la soustraction du chiffre suivant; et, comme on ne peut retrancher 9 du zéro correspondant dans le nombre supérieur, empruntez une unité, qui en vaut 10, sur le chiffre suivant; or, $10 - 9 = 1$, qu'il faut écrire sous le deuxième chiffre soustrait; passez à la soustraction du troisième chiffre, en disant : $7 + 1 = 8$ (55), et $8 - 8 = 0$, qu'il faut écrire sous le troisieme chiffre soustrait; on ne peut ensuite soustraire 5 dixièmes de 3; empruntez une unité, qui vaut 10 dixièmes, sur le chiffre suivant; or, 10 dix^{e}. + 3 dix^{e}. = 13 dixièmes, et $13 - 5 = 8$ dixièmes, qu'il faut écrire sous les dixièmes; enfin 5 unités à soustraire plus 1 empruntée font 6, et $13 - 6 = 7$ unités qu'il faut écrire sous les unités, et la soustraction est finie; le reste est 7,8019. Il en serait de même pour toutes les additions et soustractions des nombres accompagnés de parties décimales.

De la multiplication des décimales, et des nombres accompagnés de parties décimales.

147. Il faut ramener la multiplication des décimales et des nombres accompagnés des parties décimales à celle de deux nombres entiers, *en supprimant la virgule tant au multiplicande qu'au multiplicateur, et en faisant ensuite la multiplication exactement de la même manière que celle de deux nombres entiers ; mais on réduira après cela le produit à sa véritable grandeur, en retranchant de sa droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y en avait au rang des décimales, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.*

Soit proposé, par exemple, de multiplier 579,45 par 94,475, supprimez la virgule par la pensée dans ces deux termes, c'est-à-dire, multipliez-les l'un par l'autre, comme vous multiplieriez deux nombres entiers.

1er. Exemple.

579,45
94,475
289725
405615
231780
231780
521505
54743,53875

Mais séparez cinq chiffres de la droite de leur produit par une virgule, parce qu'il se trouve deux chiffres au rang des décimales dans le multiplicande, et trois au multiplicateur.

La raison de cette opération est facile à saisir; car en supprimant la virgule du multiplicande, qui était suivi de deux décimales, on l'a rendu cent fois plus grand (45). D'un autre côté, en supprimant également celle du multiplicateur, qui était suivi de trois décimales, on l'a rendu 1000 fois plus grand par les mêmes raisons; or, un nombre cent fois trop grand, étant multiplié par un nombre mille fois trop grand, donne nécessairement un produit cent fois multiplié par mille fois trop grand; mais, en retranchant 5 chiffres de ce produit par une virgule, on le rend cent mille fois plus petit (44). Conséquemment on le réduit à la valeur qu'il doit avoir.

148. On peut appliquer les mêmes raisonnemens à tout autre exemple.

2e. Exemple.

Soit proposé de multiplier :

0,15
0,3
0,045

Comme le zéro placé au rang des entiers, dans chacun des deux facteurs de ce deuxième exemple, ne sert qu'à marquer la place des entiers, et n'exprime aucune valeur, il faut multiplier 15 par 3, sans égard pour ces zéro, non plus que pour la virgule; mais le produit 45 ne contenant que deux chiffres, il faut placer ensuite un zéro à la gauche de ces derniers, afin de pouvoir retrancher par une virgule le nombre de chiffres prescrits (147); en observant encore d'écrire un zéro à la gauche de la virgule, afin qu'il occupe la place des unités.

La raison de cette opération est toute aussi facile à saisir que celle de la précédente; car, si on avait eu 15 entiers à multiplier par 3, le produit aurait été 45 entiers; mais on n'avait que 15 centièmes à multiplier par 3 dixièmes, on a donc rendu le multiplicande 100 fois et le multiplicateur 10 fois trop grands, en les considérant comme des entiers; il en résulte que le produit 45 entiers est également 100 fois multiplié par 10 fois trop grand, c'est-à-dire, 1000 fois trop grand, et qu'il faut par conséquent le rendre 1000 fois plus petit pour le ramener à sa véritable valeur.

Il fallait donc placer deux zéro à la gauche de 45, et supprimer ensuite 3 chiffres de la droite par une virgule, afin de réduire ce produit à 0,045 millièmes, qui sont mille fois plus petits que quarante cinq entiers (38).

3e. Exemple.

Soit proposé de multiplier :

0,007
0,003

0,000021

On a multiplié 7 par 3, ce qui a produit 21; mais, dans cet exemple, le multiplicande est mille fois plus petit que 7 entiers, et le multiplicateur est mille fois plus petit que 3. Le produit 21 est donc 1000 fois multiplié par 1000 fois trop

grand, c'est-à-dire, 1000000 fois trop grand ; il faut donc ajouter 4 zéro à gauche, afin de pouvoir retrancher ensuite par une virgule le nombre de chiffres prescrit (147), afin de rendre par ce moyen le produit 1000000 fois plus petit, c'est ce qu'on a fait.

C'est ainsi qu'au lieu de 21 entiers, le produit ne réprésente que 21 millionièmes, qui sont un million de fois plus petits que les 21 entiers.

149. En résumant ce qui concerne la multiplication des décimales, toutes les règles de cette opération se réduisent à celle-ci :

Multipliez les nombres suivis de décimales exactement comme les nombres entiers ; mais supprimez ensuite, de la droite de leur produit, autant de chiffres qu'il y en a au rang des décimales, tant au multiplicande qu'au multiplicateur; et, dans le cas où le produit ne contiendrait pas assez de chiffres pour que l'on en pût retrancher le nombre de chiffres prescrit, ajoutez autant de zéros à la gauche de ce produit, qu'il en faudra pour pouvoir retrancher ce même nombre de chiffres, et posez enfin un zéro à la gauche de la virgule, afin de marquer la place des unités.

De la division des décimales.

150. Lorsqu'il s'agit de diviser un nombre qui représente des parties décimales, ou qui est accompagné de décimales par un autre nombre ayant des décimales, il faut ramener la division à celle de deux nombres entiers, *en plaçant, à la droite de celui des deux nombres qui a le moins de chiffres, au rang des décimales, un nombre de zéro suffisant pour que la quantité de chiffres représentant des décimales, soit la même dans chacun, ce qui ne change pas la valeur de ce nombre* (42). Par ce moyen, en supprimant la virgule dans chacun, on les rend une même quantité de fois plus grands l'un et l'autre, ou, en d'autres termes, on les multiplie l'un et l'autre par un même

nombre, ce qui ne change rien au quotient (141); et on a deux nombres entiers.

L'opération se réduit ensuite à les diviser l'un par l'autre par les moyens ordinaires (114).

EXEMPLE.

On propose de diviser 54743,53875, par 579,45, qui sont le produit et le multiplicande, de la multiplication du n°. (147).

J'écris dividende 54743,53875 | 579,45, ou plutôt, après avoir complété par des zéro le nombre des chiffres qui représentent les décimales dans le diviseur, et supprimé la virgule, j'écris :

Dividende	547453875	57945000 *diviseur.*
	25930387 5	94475 *quotient.*
	275238750	
	434587500	
	289725000	
	00000000	

J'ai donc 547453875 pour dividende, et 57945000 pour diviseur. Après avoir pris 9 chiffres à la gauche du dividende, je vois d'abord qu'il n'y en aura que 2 au quotient à la place des entiers (112). Après avoir reconnu que le diviseur est contenu 9 fois dans le dividende, j'ai écrit 9 au quotient, j'ai multiplié le diviseur par 9 et soustrait le produit du premier dividende partiel, sous lequel j'ai écrit le reste; j'ai abaissé à côté du reste 25930387 le dernier chiffre du dividende, ce qui m'a donné 259303875 pour dernier dividende partiel des entiers. Après avoir reconnu qu'il contient 4 fois le diviseur, écrit 4 au quotient, et soustrait le produit du dernier dividende, j'ai eu pour reste 27523875.

Or ce reste ne contenant pas une fois de plus le diviseur, la division des entiers est achevée, et le quotient est 94.

Conséquemment j'ai placé une virgule à la droite du quotient des entiers pour en marquer la place, et afin d'en séparer les quotiens partiels suivans, qui n'exprimeront que des parties de l'entier de dix en dix fois plus petites, ou que des parties décimales.

En effet, ne voulant pas négliger ou abandonner le reste 27523875, il ne s'agit que de le réduire en dixièmes, en le multipliant par 10 (34), ce qui se fait bien facilement, en y ajoutant un o à droite (29).

On aura par ce moyen 275238750 dixièmes pour nouveau dividende partiel (284); ainsi, après avoir reconnu que le diviseur y est contenu 4 fois, j'écris le chiffre 4 au quotient, à la droite de la virgule placée après les entiers où il ne marque, par ce moyen, que des dixièmes (38). Je multiplie le diviseur par 4, et je soustrais le produit du dividende, sous lequel j'écris le reste, 4345875 dixièmes.

Pour réduire ce reste en centièmes, je le multiplie par 10 (35), en y ajoutant un o à droite, et j'ai, par ce moyen, 43458750 centièmes pour nouveau dividende partiel (84); ainsi, après avoir reconnu qu'il contient 7 fois le diviseur, j'écris 7 au quotient; je multiplie le diviseur par 7, et je soustrais le produit du dividende sous lequel j'ai écrit le reste 28972500 centièmes; j'ajoute encore un o à ce reste, ce qui est le multiplier par 10 (28), afin de le convertir en millièmes (36); et, divisant ce dernier produit comme le précédent, je trouve qu'il contient 5 fois le diviseur sans reste. Conséquemment la division de deux nombres, suivis de décimales, peut être réduite à la règle suivante:

151. *Dans la division des nombres suivis de décimales, on place, à la droite de celui des deux termes de la division qui a le moins de chiffres aux décimales, un nombre de zéro suffisant pour que la quantité de chiffres représentant des décimales soit la même dans chacun* (149): *on opère ensuite la division, et on place une virgule à la droite du dernier quotient partiel des entiers; on multiplie le reste*

des entiers par 10, *en y ajoutant un* o, *afin de les réduire en dixièmes; on divise ce nouveau dividende partiel, et on écrit le quotient partiel à la droite des précédens, où il occupe le rang des dixièmes; puis on multiplie encore le reste par* 10, *ou, en termes plus simples, on y ajoute un* o *pour le réduire en centièmes; on divise ce nouveau dividende partiel, et on écrit le quotient partiel à la droite du précédent reste; en un mot, on ajoute successivement un* o *à chaque reste, et on écrit chaque quotient partiel à la droite des précédens, ou on écrit un* o *au quotient par chacun des dividendes partiels, qui ne contient pas le diviseur, jusqu'à ce qu'on ait trouvé un quotient rapproché du quotient exact, à un millième, un dix millième ou à un cent millième près, et ainsi de suite.*

EXEMPLE.

152. On demande le quotient de 0,15, par 0,3.

Dividende 0,15 | 0,30 *diviseur.*

Ou encore, comme les zéro placés à la gauche des entiers ne changent rien à leur valeur, et y sont parfaitement inutiles, on peut les suprimer, et on a :

Dividende 15 | 30 *diviseur.*

000   0,5

Or il est évident que le diviseur 30 n'est pas contenu dans le dividende 15; écrivez alors un zéro au quotient avec une virgule à droite, pour marquer la place des unités, ou pour indiquer qu'il n'y a pas de quotient partiel des unités, afin que les quotiens partiels suivans se trouvent placés au rang qu'ils doivent occuper. Considérez ensuite le dividende comme le reste d'une division, et opérez sur le dividende comme sur le reste d'une division.

Ainsi ajoutez-y un o à droite pour le convertir en dixièmes, vous aurez 150 dixièmes; divisez ce nouveau dividende partiel par 30; écrivez 5 au quotient à la droite de la vir-

gule, multipliez le diviseur par 5, retranchez le produit du dividende, le reste sera o. Le quotient exact sera donc 0,5.

153. Observons ici que tout dividende qui ne contient pas le diviseur peut être considéré comme un reste de division; et réciproquement que tout reste de division peut être considéré comme un dividende dans lequel le diviseur n'est pas contenu, puisqu'il faut opérer sur l'un comme sur l'autre pour avoir le quotient en parties décimales (152).

EXEMPLE.

On demande le quotient de 0,000021 par 0,003.

Ayant ajouté 3 zéro à la droite du diviseur (150) et supprimé la virgule, on a 0000021 à diviser par 0003000; et, en supprimant les zéros de la gauche, on a :

Dividende	21,000	3000 *diviseur.*
	0000	0,007 *quotient.*

Or, comme il est évident que le diviseur 3000 n'est pas contenu dans le dividende 21, écrivez au quotient un o, suivi d'une virgule à droite, pour marquer qu'il n'y a pas de quotient partiel d'unités. Considérant le dividende 21 entiers comme un reste, ajoutez-y un o à droite, et écrivez encore o au quotient, à la droite de la virgule, parce qu'il n'y a pas non plus de quotient partiel des dixièmes (113). Considérez également le dividende 210 dixièmes comme un reste; ajoutez un o à droite, et écrivez encore o au quotient, à la droite du précédent, parce qu'il n'y a pas de quotient partiel des centièmes; enfin, considérant aussi le dividende 2100 centièmes comme un reste, ajoutez un o à droite, vous aurez pour dividende 21,000 millièmes; divisez-le par 3000, le quotient sera exactement 7, qu'il faut écrire au quotient à la droite des zéro qui y sont déjà, le quotient sera 0,007.

Des divisions dont le quotient est exact, et de celles dont on ne peut obtenir le quotient exact.

154. Jusqu'à présent, ayant toujours divisé un produit par l'un de ses deux facteurs, nous avons trouvé l'autre facteur sans reste au quotient, ou, en d'autres termes, nous avons trouvé un quotient exact.

155. Mais, en prenant deux nombres au hasard, l'un pour diviseur et l'autre pour dividende, il est bien rare que le dividende contienne exactement le diviseur une certaine quantité de fois; il y a un reste la plupart du temps.

EXEMPLE.

On demande quel est le quotient de 345 divisé par 17.

Dividende 345	17	*diviseur.*
005	20	*quotient.*

Ayant divisé 345 par 17, on a trouvé 20 au quotient et un reste de 5 unités.

156. *Lorsqu'on abandonne ou néglige le reste d'une division, il faut ajouter ce reste au produit du diviseur par le quotient pour recomposer le dividende.*

Par exemple: ayant divisé 345 par 17, et abandonné le reste 5, après avoir multiplié le diviseur 17 par le quotient 20, ajoutez au produit 340 le reste 5, pour recomposer le dividende 345. Il en est de même de tout autre nombre.

Manière d'avoir le quotient approximatif en parties décimales d'une division quelconque.

157. La plupart du temps le quotient exact, à moins d'une unité près, n'est pas assez rapproché; alors on peut multiplier chaque reste par 10, en y ajoutant un zéro, afin de réduire successivement les différens restes en partie de dix en dix fois plus petites, et d'avoir successivement le quotient partiel des dixièmes, celui des centièmes, des millièmes, et ainsi de suite, jusqu'au degré d'approximation que

l'on veut atteindre, en opérant comme on l'a déjà indiqué (151).

158. Pour avoir le quotient exact, à moins d'un dixième, d'un centième, d'un millième, etc., près, d'un nombre entier quelconque, on peut ajouter 1, 2, 3 zéro, etc., à la droite de ce nombre entier.

Mais, comme on rend par ce moyen le dividende 10 fois 100 fois, 1000 fois, etc., trop grand, ce qui rend aussi le quotient autant de fois trop grand (137), il faut séparer de la droite de ce dernier un, deux ou trois chiffres, etc., par une virgule, ce qui le rend 10, 100 ou 1000 fois, etc., plus petit (44), et par conséquent ce qui le ramène à sa juste valeur.

1er. EXEMPLE.

On veut avoir le quotient de 345 divisé par 17, à un cent millième près.

Dividende, avec les 5 zéro ajoutés à droite

```
                              34500000 | 17
                                 50    | 20,29411
                                 160
                                   70
                                    20
                                     30
Dernier reste que l'on abandonne     13
```

On a ajouté 5 zéro au dividende, parce qu'il s'agissait d'avoir cinq chiffres au rang des décimales au quotient, dont on a retranché 5 chiffres à droite, après avoir opér éla division, ce qui a donné le quotient exact à un cent millième près.

2e. EXEMPLE.

159. On veut diviser 5 par 17, à un cent millième près.

Placez un zéro à la droite, au quotient précédé d'une virgule à droite, ensuite ajoutez cinq zéro à la droite du dividende 5, et opérez comme dans l'exemple précédent (158).

Lorsque les deux termes de la division, ou l'un des deux sont suivis de décimales, on les ramène d'abord à n'en point avoir (150), après quoi on opère selon la règle qui vient d'être établie.

160. Mais, aussi loin que l'on pousse la subdivision des restes des différens dividendes partiels, en parties de dix en dix fois plus petites, afin d'avoir successivement de nouveaux dividendes partiels, et des unités de dix en dix fois plus petites à chaque nouveau quotient partiel, il est des cas où l'on ne trouvera jamais un quotient exact, et où il y aura toujours un reste qu'il faudra abandonner.

Par exemple, aussi loin que l'on pousse le degré d'approximation de la division de 345 par 17, on ne trouvera jamais un quotient exact (158).

Des divisions dont le quotient ne peut jamais être exact en parties décimales.

161. Les quotiens qui ne peuvent jamais être exacts en parties décimales, offrent, dans l'expression de leur degré d'approximation, lorsqu'on la pousse assez loin, un caractère qui indique qu'ils ne peuvent jamais être exacts; c'est le retour périodique des mêmes chiffre au quotient.

Si on divise le reste 7 par 11, pour en avoir le quotient approximatif en parties décimales, on trouvera 0,6363, et les chiffres 63 reviendront toujours ainsi dans le même ordre, sans que l'on puisse jamais s'arrêter.

En effet, comme il ne peut y avoir pour reste que l'un des nombres entiers inférieurs au diviseur, il faut nécessairement que, quand on aura fait un certain nombre de divisions, on retrouve l'un des restes précédens; et que par conséquent les dividendes partiels reviennent dans le même ordre, ainsi que les quotiens partiels. Dans l'exemple qui vient d'être donné, deux divisions suffisent pour amener ce retour; mais il en faudrait 3 en divisant le reste 12 par 37; et il en faudrait 8 en divisant 13 par 14, etc.

Du moyen d'obtenir toujours un quotient exact.

162. Ayant un *reste* de la division des entiers, au lieu de le *réduire* en dixièmes, en le multipliant par 10, etc., comme (151).

On peut toujours concevoir autant de parties égales dans l'entier qu'il y a d'unités dans le diviseur, par ex. : 2, 3, 4, ou 5, etc., lorsqu'on a le nombre 2, 3, 4 ou 5, et ainsi de suite pour diviseur. Cela posé :

163. On pourrait *réduire* les unités qui composent le *reste*, chacune en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur, en multipliant le reste par le diviseur 2, 3 ou 4, etc. : or, en divisant ensuite le produit par ce même diviseur 2, 3 ou 4, etc., il est évident qu'on aurait alors un quotient exact; car, tout produit étant divisé par l'un de ses facteurs, on doit trouver exactement l'autre au quotient (94).

164. Et observons avant de passer outre :

1°. Que les noms qui expriment les différens degrés de petitesse de ces parties sont déduits des nombres qui marquent combien il faut de ces mêmes parties pour composer l'unité. Par ex., lorsque l'unité est composé de deux parties égales, elles se nomment. *moitiés* ou *deux-ièmes ;*
de trois parties. . . *tiers* ou *trois-ièmes ;*
de quatre. . . . . . *quarts* ou *quatre-ièmes;*
de cinq. . . . . . . *cinq-ièmes.*

et ainsi de suite en ajoutant la terminaison *ième* au nombre qui marque combien on conçoit de parties égales dans l'unité.

2°. Que pour abréger les expressions on représente ordinairement les quantités plus petites que l'unité, ou *les fractions* (16), par le moyen de deux nombres, dont l'un placé au-dessus d'un trait qui marque combien de *tiers*, de *quarts*, de *cinquièmes*, etc., composent la *fraction;* et dans l'autre, placé au-dessous de ce même trait, indique le nom de ces parties, en marquant combien on en conçoit dans l'unité. Par ex., ayant les fractions 2 *tiers*, 3 *quarts*, 4 *cinquièmes*, etc., on

les exprime plus brièvement ainsi : $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, etc., et pour énoncer de semblables quantités, on énonce d'abord le nombre supérieur, et ensuite le nombre inférieur en ajoutant à l'énonciation de celui-ci la terminaison *ième*. Ainsi, pour énoncer $\frac{4}{5}$, par ex., on prononcera 4 *cinq-uièmes*, pour énoncer $\frac{5}{17}$, on prononcera 5 *dix-sept-ièmes*, etc.

165. Reprenons maintenant le raisonnement ci-dessus (163).

Ayant donc 5 à diviser par 17 ou $\frac{5}{17}$ (99), dont il s'agirait d'avoir le quotient exact :

Si on multipliait d'abord les 5 entiers du dividende par le diviseur 17, afin de les réduire en *dix-septièmes* (163), et si on divisait le produit 85 *dix-septièmes* par ce même diviseur 17, afin d'avoir le nombre des *dix-septièmes* qui doivent composer le quotient (163), on retrouverait exactement 5 au quotient; car $\frac{17}{5\times17}=5$; mais le quotient serait 5 *dix-septièmes*, ou $\frac{5}{17}$ et non 5 entiers. On voit par là clairement, qu'en général :

166. Tout reste de division, ou tout dividende plus petit que le diviseur, peut être pris pour quotient de la division qu'il doit subir (165); mais il doit être mis sous la forme d'une fraction ou d'une division indiquée, en plaçant au-dessous de lui le diviseur dont il doit être séparé par un trait. Par exemple : ayant à diviser 5 par 17, ou 7 par 9, ou encore 25 par 43, etc., divisions que l'on indique ainsi : $\frac{5}{17}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{25}{43}$, etc., le quotient sera : 5 *dix-septièmes*, 7 *neufièmes*, 25 *quarante-troisièmes*, dont l'expression abrégée est $\frac{5}{17}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{25}{43}$, ainsi :

167. Dans toute division indiquée, dont le dividende est plus petit que le diviseur, le quotient ne peut être autre chose qu'une fraction qui a le dividende pour l'un de ses deux termes, et pour l'autre le diviseur.

Ou, en d'autres termes :

168. Dans toute division indiquée, les signes qui expriment la division à faire, sont parfaitement les mêmes que

ceux qui en expriment le *quotient*. Par exemple : le quotient de 5 à diviser par 17, ou de $\frac{5}{17}$, est la fraction $\frac{5}{17}$. Donc, en général :

169. Toute division indiquée, dont le dividende est plus petit que le diviseur, peut être considérée comme une *fraction* qui exprime le quotient de la division du plus petit de ces deux termes par le plus grand, et réciproquement :

170. Toute fraction peut être considérée comme la division indiquée du plus petit de ses deux termes par le plus grand.

Des fractions.

171. Une fraction est composée d'une ou plusieurs des parties égales dans lesquelles l'unité a été divisée. Par ex. : $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, etc., sont des fractions, et il faut nécessairement deux nombres séparés par un trait de plume pour les représenter par des chiffres.

172. L'un, qui est placé au-dessus de ce trait, exprime de combien de parties égales de l'unité la fraction est composée, ou, en d'autres termes, *numère* les parties qui la composent : on le nomme *numérateur*.

L'autre tient lieu du nom de ces mêmes parties, ou en donne la *dénomination*, en exprimant combien il en faut pour composer l'unité : on l'appelle par cette raison *donneur de nom* ou *dénominateur*.

Dans $\frac{3}{4}$, par exemple, 3 est la *numérateur*, parce qu'il exprime que cette fraction est composée de 3 des 4 parties égales dans lesquelles l'unité a été divisée ; et 4 le *dénominateur*, parce qu'il exprime que l'unité, étant composée de 4 parties égales, elles sont nommées, par cette raison, *quatrièmes* ou *quarts*.

173. Or, on a déjà vu qu'une fraction peut être considérée comme une division indiquée (170), et aussi comme le quotient de la division du plus petit de ses deux termes par le plus grand (169). Donc, en général :

Dans toute fraction le numérateur est un vrai divi-

dende (167), le dénominateur un vrai diviseur (167), et la fraction est elle-même le quotient de la division. Il en résulte qu'on peut appliquer à une fraction tout ce qui a été dit de l'effet sur le quotient des changemens faits aux termes d'une division. Ainsi :

174. Multiplier ou diviser le numérateur (137) d'une fraction, par un nombre entier tel que 2, 3 ou 4, etc., c'est multiplier ou diviser cette fraction par ce même nombre.

175. Multiplier le dénominateur d'une fraction par un nombre entier, tel que 2 ou 3 ou 4, etc., c'est diviser cette fraction (139) par ce même nombre.

176. Diviser le dénominateur d'une fraction par 2, 3 ou 4, etc., c'est multiplier cette fraction (140) par ce même nombre.

177. Mais une fraction ne change pas de valeur lorsqu'on en multiplie les deux termes par un même nombre (141), ou lorsqu'on les divise sans reste par un même nombre, et cette propriété sert à les réduire à une plus simple ou une plus grande expression.

178. Lorsqu'on en divise les deux termes successivement par 2, par 3, par 4, etc., sans reste, c'est ce qu'on appelle les réduire à une plus simple expression.

179. Lorsqu'on en multiplie les deux termes par un même nombre, cela s'appelle les réduire à une plus grande expression.

180. Dans toute fraction, on peut encore considérer le numérateur comme un nombre composé d'unités, dont le dénominateur exprime le nom. Dans $\frac{4}{5}$, par exemple, en substituant au dénominateur 5 le nom dont il tient lieu, on aurait le nombre 4 *cinquièmes*, composé de 4 unités appelées *cinquièmes*. Conséquemment :

181. On peut additionner les fractions de la même manière que les nombres entiers, lorsqu'elles ont un même dénominateur, en additionnant leurs numérateurs, et en donnant au résultat ce même dénominateur. Par exemple :

ayant $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{8}$ à additionner, on additionne les trois numérateurs 1, 2, 4, dont la somme est 7, à laquelle on donne 8 pour dénominateur, ainsi $\frac{7}{8}$.

En effet	1	*huitième*
	2	*id.*
	4	*id.*
font	7	*huitièmes.*

182. On peut aussi soustraire une fraction d'une autre, de la même manière qu'on soustrait un nombre entier d'un autre, lorsqu'elles ont un même dénominateur, en soustrayant le numérateur de l'une de celui de l'autre, et en donnant au résultat ce même dénominateur. Par exemple, ayant $\frac{3}{8}$ à soustrnire de $\frac{4}{8}$, on soustrait le numérateur 3 du numérateur 4, et on donne au reste 1 le dénominateur 8; ainsi $\frac{1}{8}$:

En effet, de	4	*huitièmes*
soustraire	3	*huitièmes*,
reste	1	*huitième.*

183. On peut également multiplier une fraction par un nombre entier, de la même manière qu'on multiplie un nombre entier, en multipliant le numérateur sans rien changer au dénominateur. Par exemple : ayant à multiplier $\frac{3}{24}$ par 7, on peut multiplier le numérateur 3 par 7, le produit est 21, numérateur auquel on donne le dénominateur 24.

En effet, si on multiplie	3	*vingt-quatrièmes*
par	7	
le produit sera	21	*vingt-quatrièmes.*

184. Enfin, on peut aussi diviser une fraction par un nombre entier, de la même manière qu'on divise un nombre entier, en divisant le numérateur sans rien changer au dénominateur, lorsque la division du numérateur peut être faite sans reste. Par exemple : ayant à diviser $\frac{21}{24}$ par 7, on peut

diviser sans reste le numérateur 21 par 7; le quotient est 3, auquel on donne le dénominateur 24, ainsi $\frac{3}{24}$:

En effet, si on divise 21 *vingt-quatrièmes*
par 7
le quotient sera 3 *vingt-quatrièmes*.

185. Mais le plus souvent les dénominateurs des fractions qu'il s'agit d'additionner ou soustraire l'une de l'autre, sont différens; alors on réduit d'abord ces fractions en fractions d'un même dénominateur (124), après quoi on additionne (181), ou on soustrait (182) les numérateurs.

186. Lorsque le numérateur ne peut être divisé sans reste par 2, par 3 ou par 4, etc., on obtient le même résultat en multipliant au contraire le dénominateur (175) par 2, par 3 ou par 4, etc.

187. Lorsqu'on doit diviser un nombre entier accompagné d'une fraction, on *réduit* préalablement en fraction, après quoi on opère sur celle-ci la division proposée.

188. Lorsque l'opération faite sur une fraction a pour résultat une quantité qui contient des entiers sous la forme d'une fraction, on réduit celle-ci en entiers (193).

Indépendamment des quatre opérations de l'arithmétique que l'on peut faire sur les fractions, comme sur les nombres entiers, elles donnent donc lieu à des réductions dont il faut préalablement se former une idée exacte; il sera traité ensuite encore de chacune des opérations de l'arithmétique sur les fractions, afin d'en rendre la théorie plus claire.

Des réductions auxquelles les fractions donnent lieu.

189. Il arrive souvent qu'on a: 1°. un nombre fractionnaire (17), tel, par exemple, que $7\frac{4}{9}$ à réduire en fractions d'un même dénominateur que celle qui accompagne les entiers, ainsi que des entiers à réduire en fractions d'un dénominateur donné; 2°. ou des quantités représentées sous la forme de fractions à réduire en entiers, parce qu'elles en con-

tiennent : comme, par exemple, $\frac{6}{9}$, $\frac{55}{8}$, $\frac{29}{5}$, etc. ; 3°. ou des fractions à réduire à une plus simple expression ; 4°. ou des fractions de dénominateurs différens à réduire en fractions d'un même dénominateur ; 5°. ou des fractions à réduire en subdivisions des mesures en usage ; 6°. ou des fractions à réduire en fractions décimales ; 7°. ou des fractions décimales à réduire, soit en fractions ordinaires, soit en subdivisions des mesures en usage.

Il est bon d'avoir avant tout une idée exacte de ces réductions, par la raison que l'une ou l'autre d'entre elles doit précéder dans certains cas les opérations de l'arithmétique sur les fractions, et encore parce que les résultats de cette opération donnent le plus souvent lieu à ces mêmes réductions.

Et il ne faut jamais perdre de vue qu'opérer des *réductions* sur des quantités quelconques, ce n'est que les représenter sous des formes différentes, sous lesquelles elles restent toujours les mêmes (84); ce qui s'applique par conséquent aux fractions, etc., comme aux autres quantités.

De la réduction des entiers en fractions, et de celles-ci en entiers, lorsqu'elles en représentent sous la forme d'une fraction.

190. On réduit les entiers en fractions en les multipliant par le dénominateur de la fraction en laquelle on veut les réduire. Par exemple : sachant que l'unité vaut $\frac{9}{9}$, si on veut convertir cinq entiers en neuvièmes, on multipliera 5 par 9, et on aura $\frac{45}{9}$. En effet, lorsqu'on veut convertir 5 en neuvièmes, on regarde l'unité comme composée de 9 parties, les 5 unités en contiendront donc 45. Ainsi :

191. *Pour réduire des entiers en fractions d'un dénominateur donné, il faut les multiplier par le dénominateur donné; le produit est le numérateur d'une fraction qui a pour dénominateur le dénominateur donné.*

Également $7\frac{4}{9}$ convertis en neuvièmes feront $\frac{67}{9}$, de même

$6\frac{7}{8}$ convertis en huitièmes feront $\frac{55}{8}$, de même $5\frac{4}{5}$ convertis en cinquièmes feront $\frac{29}{5}$, et ainsi de suite.

En effet, puisque 7 unités converties en neuvièmes valent $\frac{7\times9}{9}$ ou $\frac{63}{9}$, $7\frac{4}{9}$ valent évidemment 63 neuvièmes plus 4 neuvièmes, c'est-à-dire, $\frac{67}{9}$; et il en est de même de tout autre nombre fractionnaire réduit en fraction d'un même dénominateur que celle qui accompagne les entiers. Ainsi :

192. Pour réduire des entiers en une fraction d'un même dénominateur que celle dont ils sont accompagnés, et ne former qu'une seule quantité de ces entiers et de la fraction qui les accompagne, il faut multiplier les entiers par le dénominateur de la fraction qui les accompagne, et ajouter le numérateur au produit. Ce produit est le numérateur d'une fraction qui a pour dénominateur le dénominateur par lequel on a multiplié les entiers.

193. Les quantités telles que $\frac{67}{9}$, $\frac{55}{8}$, ou $\frac{29}{5}$, etc., ne sont donc pas des fractions proprement dites, ce sont des entiers sous la forme d'une fraction, on leur donne cependant par extension le nom de fractions.

Pour réduire des quantités semblables en entiers, ou, en d'autres termes, pour extraire les entiers qui s'y trouvent contenus, il faut diviser le numérateur par le dénominateur. Le quotient marquera les entiers, et le reste de la division sera le numérateur de la fraction qui accompagne ces entiers. Ainsi $\frac{67}{9}$ donneront $7\frac{4}{9}$, $\frac{29}{5}$ donneront $5\frac{4}{5}$, $\frac{55}{8}$ donneront $6\frac{7}{8}$, et ainsi de suite.

En effet, si l'on prend toutes les parties dans lesquelles on aura partagé une unité principale quelconque, on aura l'unité ou l'entier; mais alors le numérateur est égal au dénominateur; donc une fraction vaudra autant d'entiers que son numérateur contiendra de fois le dénominateur.

On trouvera donc les entiers qu'elle peut contenir en divisant le numérateur par le dénominateur, et le quotient exprimera les entiers que l'on cherche.

194. On peut aussi représenter un nombre entier quelconque sous la forme d'une fraction, en le prenant pour numérateur d'une fraction à laquelle on donne l'unité pour dénominateur. Par ex. : on peut représenter le nombre 57, ainsi $\frac{57}{1}$, et on peut prendre cette fraction pour le nombre 57.

Enfin, on peut de même représenter l'unité sous la forme d'une fraction, en la prenant elle-même pour numérateur et pour dénominateur de cette fraction. Ainsi : $\frac{1}{1}$; et remarquons avant de passer outre, qu'en général :

195. On a l'unité sous la forme d'une fraction, toutes les fois que le numérateur est égal au dénominateur, ou, en d'autres termes, lorsque ce dernier est contenu exactement une fois dans le numérateur (193).

De la réduction d'une fraction quelconque à sa plus simple expression.

196. En divisant les deux termes d'une fraction par un même nombre, lorsqu'on le peut exactement sans reste, et en prenant le quotient du numérateur pour numérateur, et celui du dénominateur pour dénominateur, on a une nouvelle fraction identique avec la première, c'est-à-dire, on a une fraction de même valeur, mais réduite à une plus simple expression (195); en divisant ensuite les deux termes de cette dernière par un même nombre, si cela est possible sans reste; en divisant encore par un même nombre les 2 termes de la nouvelle fraction obtenue, et en répétant la même opération autant de fois qu'elle pourra se faire exactement sur les deux termes de chaque fraction, à mesure qu'on l'obtiendra, on aura des fractions identiques qui seront successivement réduites chacune à une plus simple expression, à mesure que les deux termes en seront exprimés par de plus petits nombres; et on aura, dans celle dont les deux termes ne pourront plus être divisés par un même nombre, la fraction réduite à sa plus simple expression.

197. La seule difficulté consiste à savoir reconnaître quels sont les nombres par lesquels on peut diviser exactement les 2 termes d'une fraction. On peut les chercher sur les principes suivans :

Tout nombre qui finit par un chiffre pair est divisible par 2.

198. Tout nombre dont les chiffres, additionnés comme s'ils exprimaient des unités simples, composent une somme qui contient un nombre exact de fois 3, ou qui est un multiple de 3, sera divisible par 3.

Par exemple, 54954873 est divisible par 3, parce que les chiffres 5, 4, 9, 5, 4, 8, 7, 3, additionnés comme des unités, font 45 qui contient 15 fois 3.

199. Tout nombre dont les chiffres additionnés composent une somme qui contient un nombre exact de fois 9, ou qui est un multiple de 9, est divisible par 9.

200. Tout nombre terminé par 5 ou par un zéro est divisible par 5. Tout nombre terminé par 1, 2 ou 3 zéro, etc., est divisible par 2, 4, 8, 5, 25, 125, etc.

Quoiqu'il soit possible de trouver de pareilles règles pour d'autres nombres, comme l'examen auquel ils assujettissent est aussi long que la division, il est préférable d'essayer la division des deux termes de la fraction successivement par chacun des nombres premiers, tels que 2, 3, 5, 7, etc., et de répéter la division faite par chaque nombre premier sur chaque résultat à mesure qu'on l'obtiendra, autant que cela est possible sans reste.

Voici donc le procédé qu'il faut suivre.

On divisera d'abord les deux termes d'une fraction par 2, on divisera encore par 2 le résultat de cette première opération, puis encore par 2 le résultat de la seconde; et ainsi de suite, autant de fois que le résultat de l'opération précédente pourra être exactement divisé par 2.

On divisera ensuite de la même manière les 2 termes par

3, autant de fois qu'on le pourra exactement, on fera la même chose successivement par 5, 7, 11, etc., c'est-à-dire, par les nombres qui n'ont aucun diviseur qu'eux-mêmes, par la raison qu'après avoir épuisé la division par 2, par ex., il est inutile de tenter la division par 4, ou par tout autre multiple de 2, puisque, si cette dernière pouvait réussir, à plus forte raison celle par 2 aurait pu se faire. De même après avoir épuisé la division par 3, il est inutile de tenter de la faire par des multiples de 3, et ainsi de suite.

EXEMPLE.

Soit proposé de réduire la fraction $\frac{216}{504}$ à sa plus simple expression. Divisez-en les deux termes par 2, parce que le dernier chiffre de chacun est pair, vous aurez $\frac{108}{252}$; par la même raison, divisez encore les deux termes de cette dernière par 2, vous aurez $\frac{54}{126}$; divisez encore les 2 termes de cette dernière par 2; vous aurez $\frac{27}{63}$; divisez enfin les deux termes de cette dernière par 3, parce que la somme des chiffres de chacun compose un multiple de 3 (198), vous aurez $\frac{9}{21}$; divisez enfin les 2 termes de cette dernière par 3, parce que la somme des chiffres de chacun contient un nombre exact de fois 3 (198), et vous aurez $\frac{3}{7}$, fraction qui ne peut être réduite à une plus simple expression. Vous auriez pu également diviser les 2 termes de $\frac{27}{63}$ par 9 (199).

De la réduction d'une fraction à sa plus simple expression, en divisant les deux termes par le plus grand COMMUN DIVISEUR.

201. Observons ici que diviser les 2 termes d'une fraction par 2, c'est les rendre chacun deux fois plus petits; que les 2 termes qui sont 2 fois plus petits, étant divisés encore par 2, sont 2 fois multipliés par 2 fois plus petits encore, et par conséquent 4 fois plus petits que les deux premiers; qu'étant encore rendus 2 fois plus petits, ils se trouvent 2 fois × 4 fois plus petits, ou 8 fois plus petits; qu'étant divisés ensuite par 3,

ils sont huit fois multipliés par 3 fois plus petits, ou 24 fois plus petits; enfin qu'étant divisés encore par 3, ils seront 24 fois × 3 fois plus petits ou 72 fois plus petits qu'ils ne l'étaient primitivement. Or, en les divisant tout à coup par 72, on les aurait rendus 72 fois plus petits. Donc,

202. *En divisant les deux termes d'une fraction par le plus grand commun diviseur qui puisse les diviser exactement tous les deux, on peut la réduire tout à coup à sa plus simple expression par une seule opération.*

203. Toute la difficulté consiste à savoir chercher le plus grand commun diviseur possible. Comme la recherche du plus grand commun diviseur est souvent moins longue que l'examen auquel on est assujetti, en prenant successivement les nombres 2, 3, 5, 7, etc., pour diviseurs communs, il ne faut pas négliger de se la rendre familière.

De la manière de trouver le plus grand diviseur commun de deux nombres.

204. Le plus grand diviseur commun de deux nombres, ou des deux termes d'une fraction doit être nécessairement contenu une quantité exacte de fois dans le plus petit comme dans le plus grand, sans quoi il est évident qu'il ne pourrait les diviser exactement tous les deux. C'est sur ce principe qu'il faut chercher le plus grand commun diviseur des deux termes d'une fraction.

Proposons-nous donc de trouver le plus grand diviseur commun des deux nombres 168 et 630, ou, ce qui revient au même, des deux termes de la fraction $\frac{168}{630}$. Je remarque d'abord que le plus petit des 2 termes de cette fraction est contenu une fois sans reste en lui-même, et qu'ainsi s'il divisait également l'autre terme sans reste il serait le plus grand diviseur commun demandé. Pour découvrir s'il l'est en effet, je divise le plus grand des deux termes de la fraction par le plus petit; je trouve 3 au quotient, et pour reste 126.

168 n'est donc pas le diviseur commun que l'on cherche; mais je vois que 126 est contenu une fois en lui-même; qu'ainsi s'il divisait exactement le plus petit des deux termes de la fraction, il serait le plus grand diviseur commun demandé; pour découvrir s'il l'est en effet, je divise 168 par 126, je trouve 1 au quotient et pour reste 42.

126 n'est donc pas encore le plus grand diviseur commun que l'on cherche; mais je vois que le second reste 42 peut être divisé par lui-même; qu'ainsi s'il divisait exactement 126, reste précédent, il serait le plus grand diviseur commun que l'on cherche.

Pour découvrir s'il l'est en effet, je divise 126 par 42, et trouve enfin 3 au quotient sans reste, d'où je conclus que 42 est le plus grand diviseur commun que l'on cherche.

En effet il est évident que 42 est le plus grand commun diviseur de 42, dernier reste, et du reste précédent $126 = 42 \times 3$; il l'est donc aussi de 126 et de $168 = 126 \times 1 + 42$, et par conséquent de 168 et de $630 = 168 \times 3 + 126$. Donc 42 est le plus grand diviseur commun des deux termes de $\frac{168}{630}$.

D'où on peut conclure cette règle générale :

205. *Pour trouver le plus grand diviseur commun des deux termes d'une fraction, divisez le plus grand par le plus petit; si la division se fait sans reste, le plus petit sera le diviseur commun demandé. Dans le cas où la division ne donnerait pas un quotient exact, divisez ensuite le plus petit des deux termes de la fraction par le reste du plus grand; si cette seconde division donne un quotient exact, le reste de la première sera le plus grand diviseur commun que l'on cherche. Dans le cas où la seconde division ne donnerait pas un quotient exact, divisez le reste de la première par celui de la seconde, puis divisez le reste de la seconde par celui de la troisième, s'il y en a un; et continuez ainsi à diviser le reste de l'opération précédente par le reste de la dernière, jusqu'à ce que vous parveniez à trouver un dernier reste qui divise exactement le précédent; le dernier reste qui aura divisé exac-*

tement le précédent, sera le plus grand diviseur commun demandé.

Si on trouve l'unité pour dernier reste, en opérant selon cette règle, on doit en conclure que la fraction est irréductible, parce qu'en effet lorsque les deux termes d'une fraction n'ont pas de plus grand diviseur commun que l'unité, ils restent les mêmes (149).

206. Et observons, avant de passer outre, que tout nombre qui ne peut être divisé que par lui-même et par l'unité, est ce qu'on appelle un nombre premier, 1, 3, 5, 7, 11, 13, etc., sont des nombres premiers.

De la réduction des fractions à une plus grande expression, ou à un plus grand dénominateur.

207. En multipliant successivement les deux termes d'une fraction par 2, par 3, par 4, par 5, etc., on peut la réduire à un plus grand dénominateur d'une infinité de manières différentes. Par ex. : ayant $\frac{1}{2}$, si on multiplie les deux termes par 2, par 3, par 4, par 5, etc., on aura : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$, etc.

De même ayant l'unité sous la forme d'une fraction, ainsi $\frac{1}{1}$, si on en multiplie les 2 termes par 2, 3, 4, 5, etc., successivement, on aura : $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5}$, etc., qui ne sont que différentes expressions de l'unité. On en a conclu la manière de réduire les fractions de dénominateurs différens à un même dénominateur.

De la réduction des fractions au même dénominateur.

208. Ayant plusieurs fractions de dénominateurs différens, on les *réduira* au même dénominateur, *en multipliant successivement les deux termes de chacune par le dénominateur de chacune des autres.*

En effet, elles seront toujours les mêmes, puisque leurs deux termes auront été multipliés par de mêmes nombres (177), or, elles auront aussi un même dénominateur, puisque

celui de chacune sera le produit de tous leurs dénominateurs différens. Par ex., ayant les fractions, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, à *réduire* au même dénominateur; en multipliant les deux termes de la première par chacun des dénominateurs des trois autres fractions, ou, ce qui revient au même, par leur produit (130), on aura $\frac{60}{120}$; les 2 termes de la seconde par le produit des dénominateurs des trois autres, on aura $\frac{80}{120}$; les 2 termes de la troisième par le produit des dénominateurs des trois autres, on aura $\frac{90}{120}$; enfin les 2 termes de la dernière par le produit des dénominateurs des trois autres, on aura $\frac{96}{120}$; il en serait de même quelles que fussent les fractions proposées.

209. Plusieurs fractions étant réduites au même dénominateur, celui-ci est ce qu'on appelle le *dénominateur commun*. Par ex., ayant les fractions $\frac{60}{120}$, $\frac{80}{120}$, $\frac{90}{120}$, $\frac{96}{120}$, 120 est le dénominateur commun.

Et observons, avant de passer outre, qu'en général:

210. Pour former le produit de plusieurs nombres quelconques, il en faut multiplier deux l'un par l'autre, le produit de ces deux par un troisième, le produit de ces trois par un quatrième, et ainsi de suite jusqu'au dernier. Par ex., pour former le produit des nombres 2, 3, 4, 5, il faut multiplier 2 par 3 dont le produit est 6, puis 6 par 4 dont le produit est 24, puis 24 par 5 dont le produit est 120; et ainsi de suite pour un plus grand nombre de facteurs.

Et pour abréger les expressions, on indique la multiplication de deux nombres, puis celle de leur produit par un troisième, puis celle du produit de ces trois nombres par un 4e., et ainsi de suite pour un 5e., un 6e., etc., en les écrivant tous à la suite l'un de l'autre, séparés par ce signe $\times$ de la multiplication. Qu'il s'agisse, par ex., de former le produit des nombres 2, 3, 5, 7, etc., on indique les multiplications successives qui doivent donner ce produit et ce produit lui-même ainsi : $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$.

211. Le produit de deux, trois, quatre nombres, et ainsi de suite, sera le même dans quelqu'ordre qu'on les multiplie,

et sera divisible exactement, ou sans reste par chacun de ses facteurs.

Par ex. : qu'il s'agisse de former le produit des trois nombres 2, 3 et 6 : puisque pour l'obtenir il faut multiplier le produit de deux de ces nombres par le troisième, les deux premiers ne sont autre chose que les facteurs de l'un des deux termes de la dernière multiplication, par laquelle on obtient le produit des trois nombres proposés. Supposons donc qu'après avoir pris d'abord 2 et 3 pour facteurs du multiplicande, et 6 pour multiplicateur de la dernière multiplication par laquelle on obtient le produit que l'on cherche, on voulût substituer à 3, qui est l'un des facteurs du multiplicande, le multiplicateur 6, et au multiplicateur 6 le nombre 3, on aurait l'un des facteurs du multiplicande double de ce qu'il était, et par conséquent un multiplicande deux fois plus grand; mais le multiplicateur n'étant que la moitié de ce qu'il était avant ces substitutions, le produit resterait le même (132); et il est évident que cela est général, car il en doit être nécessairement de même, quel que soit celui des facteurs du multiplicande que l'on substitue au multiplicateur, et réciproquement; c'est-à-dire, quels que soient les nombres que l'on substitue l'un à l'autre, par la raison que l'un augmentera ou diminuera le multiplicateur, comme l'autre au contraire diminuera ou augmentera le multiplicande, ce qui ne changera rien au produit.

Or, lorsque les facteurs dont on veut avoir le produit sont au nombre de 4, etc., il en est de même; car, s'ils sont au nombre de 4, par exemple, trois d'entre eux étant pris pour facteur du multiplicande, et le quatrième pour multiplicateur de la dernière multiplication par laquelle on obtient le produit que l'on cherche, on peut, d'après ce qui vient d'être démontré, substituer le multiplicateur au 1er., au 2e. ou au 3e. facteur du multiplicande, et ce 1er., 2e. ou 3e. facteur au multiplicateur, sans rien changer au produit; et ainsi de suite pour un plus grand nombre de facteurs. Conséquemment:

212. Dans la dernière multiplication, par laquelle on obtient le produit de trois, quatre, cinq nombres, et ainsi de suite, ce produit peut être considéré comme ayant pour multiplicateur le 1er., 2e., 3e., 4e. ou 5e. de ces mêmes nombres, et le produit de tous les autres pour multiplicande, c'est-à-dire, comme ayant pour l'un de ses facteurs chacun de ces mêmes nombres, d'où il suit évidemment qu'il peut être divisé sans reste par chacun d'eux (94).

213. Ayant multiplié les deux termes d'une fraction par 2, les résultats encore par 2, on a vu (130) qu'on aurait pu multiplier les deux termes de cette fraction par $4 = 2 \times 2$; de même qu'ayant à multiplier un nombre par 2, puis le résultat par 2, puis ce dernier encore par 2, on pourrait multiplier tout à coup par $8 = 2 \times 2 \times 2$, et ainsi de suite.

214. Le nombre 2, considéré comme n'ayant d'autre facteur que lui-même et que l'unité, est ce qu'on appelle la première puissance de 2, et en général tout nombre premier tel que 2, 3, 5, 7 ou 11, etc. (206), est appelé la première puissance de 2, 3, 5, 7 ou 11, etc.

215. Les nombres $4 =$ à 2×2, $9 = 3 \times 3$, $25 = 5 \times 5$, etc., considérés, le premier comme ayant 2 fois le nombre 2 pour facteur; le second, comme ayant deux fois le nombre 3 pour facteur; le troisième, comme ayant deux fois le nombre 5 pour facteur, etc., sont ce qu'on appelle la seconde puissance de 2, de 3, de 5 respectivement, et ainsi de suite; ce que l'on peut exprimer ainsi : 2^2, ou 3^2, ou 5^2, etc.

Et le chiffre 2, placé un peu au-dessus de la droite de 2, ou de 3, ou de 5, est appelé *exposant*, parce qu'il exprime que 2, ou que 3, ou que 5, etc., doit être multiplié par lui-même ou élevé à la seconde puissance, en un mot, est deux fois facteur dans la puissance indiquée par ce même exposant 2.

216. Les nombres $8 = 2 \times 2 \times 2$; $27 = 3 \times 3 \times 3$; $125 = 5 \times 5 \times 5$, etc., considérés, le premier comme ayant trois fois le nombre 2 pour facteur; le second, comme ayant trois fois le nombre 3 pour facteur; le troisième, comme ayant

trois fois le nombre 5 pour facteur, sont ce qu'on appelle la troisième puissance de 2, de 3 ou de 5, etc., respectivement, que l'on peut exprimer ainsi : 2^3, ou 3^3, ou 5^3.

217. De même $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ est la 4e. puissance de 3, et ainsi de suite pour la 5e., la 6e., etc. Donc, en général :

218. La première puissance d'un nombre n'est autre chose que le produit de ce même nombre par l'unité (214).

Sa seconde puissance n'est autre chose que le produit de ce nombre par lui-même, ou qu'un produit dans lequel ce nombre est 2 fois facteur (215).

Sa troisième puissance n'est autre chose que le produit de sa seconde puissance par lui-même, ou qu'un produit dans lequel ce nombre est 3 fois facteur (216).

Sa quatrième puissance n'est que le produit de sa troisième puissance par lui-même, ou qu'un produit dans lequel ce nombre est 4 fois facteur (217), et ainsi de suite.

Or, la puissance la plus élevée d'un nombre quelconque a pour facteurs toutes les puissances inférieures. Par exemple, la quatrième a pour l'un de ses facteurs la troisième, qui a pour l'un de ses facteurs la seconde, qui a elle-même pour l'un de ses facteurs la première. Donc :

219. *La puissance la plus élevée peut être divisée exactement ou sans reste par chacune des autres, ou les contient un nombre de fois sans reste* (218).

220. On pourra réduire au même dénominateur autant de fractions que l'on voudra, par la règle qui vient d'être établie; mais, outre que cette opération est trop longue pour les usages de la pratique, le dénominateur commun que l'on trouve par ce moyen, est le plus souvent beaucoup plus grand qu'il ne pourrait l'être.

On préfère, dans la pratique, les méthodes qui offrent les plus grandes abréviations possibles, mais qui rendent nécessaires les explications préalables qui viennent d'être faites 210) et suivans, et d'autres détails.

Méthode des praticiens pour réduire les fractions au même dénominateur.

221. Ayant remarqué qu'on a l'unité sous la forme d'une fraction, lorsque dans celle-ci le numérateur est égal au dénominateur (195) et (207), qu'on a la moitié de l'unité lorsque le numérateur est la moitié du dénominateur, quel que soit ce dernier, il est évident qu'on a aussi le tiers de l'unité, lorsque le numérateur est le tiers de son dénominateur, et ainsi de suite. On en a conclu qu'en général :

222. Ayant des fractions telles que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, etc., on peut les réduire au même dénominateur, en prenant pour dénominateur commun un nombre qui puisse être divisé sans reste par le dénominateur de chacune de ces trois fractions ; or, ce nombre serait ici $30 = 2 \times 3 \times 5$, c'est-à-dire, serait le produit des dénominateurs des 3 fractions proposées (211) ; et en prenant ensuite la moitié, le tiers, le cinquième de ce dénominateur commun pour numérateur de la première, de la seconde, de la troisième des fractions qui auront ce même dénominateur 30 pour dénominateur commun, et qui seront égales aux trois fractions proposées. En effet, par ce moyen on aurait :

$$\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

Et il en serait de même quel que fût le nombre des fractions à réduire à un même dénominateur, si elles avaient chacune pour dénominateur un nombre premier tel que 2, 3, 5, et ainsi de suite.

EXEMPLE.

223. Les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, qui ont chacune un nombre premier pour dénominateur, soit proposé de les réduire au même dénominateur.

On aura toujours le dénominateur commun en formant le produit de tous les dénominateurs des fractions proposées ;

ainsi le dénominateur commun sera ici $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$, après quoi, en prenant la moitié, 2 fois le tiers, 4 fois le cinquième, 5 fois le septième du dénominateur commun 210, on aura le numérateur de la 1re., de la 2e., de la 3e., de la 4e. des fractions qui auront 210 pour dénominateur commun, et qui seront égales respectivement à la 1re., à la 2e., à la 3e., à la 4e. des fractions proposées.

OPÉRATION.

	210	dénominateur commun.
	105	moitié du D. C.
2 fois le tiers du D. C.	140	70 tiers de *id.*
4 fois le $\frac{1}{5}$ de *id.*	168	42 cinquième de *id.*
5 fois le $\frac{1}{7}$ de *id.*	150	30 septième de *id.*

J'ai écrit le D. C. au-dessus d'une ligne horizontale, sous laquelle j'en ai tracé une perpendiculaire.

Après quoi pour avoir les numérateurs des 4 fractions qui doivent avoir 210 pour dénominateur commun, et qui doivent être de même valeur que les 4 fractions proposées,

J'ai d'abord pris la moitié de 210, qui est 105, laquelle moitié j'ai placée à la gauche du trait vertical; or, le numérateur 105 est la moitié du D. C. comme le numérateur 1 de la fraction $\frac{1}{2}$ est la moitié de son dénominateur; ensuite, pour avoir 2 fois le tiers du D. C., j'en ai pris d'abord le tiers qui est 70, que j'ai placé à la droite du trait vertical, après quoi j'ai multiplié 70 par 2, pour avoir 2 fois le tiers de 210, ce qui m'a donné 140 que j'ai placé à la gauche du trait vertical, au-dessous de 105; or, le numérateur 140 est les 2 tiers du D. C. 210, comme le numérateur 2 de la fraction $\frac{2}{3}$ est les 2 tiers de son dénominateur; ensuite pour avoir 4 fois le cinquième du D. C., j'en ai pris le cinquième qui est 42, et j'ai écrit ce nombre à la droite du trait vertical, après quoi j'ai multiplié 42 par 4 pour avoir 4 fois le cinquième du D. C., ce qui m'a donné 168 que j'ai placé à la gauche du trait vertical; or, le numérateur 168 est les 4 cinquièmes du D. C.

210, comme le numérateur 4 de la fraction $\frac{4}{5}$ est les 4 cinquièmes de son dénominateur ; enfin pour avoir 5 fois la septième partie du D. C., j'en ai pris le septième, qui est 30, que j'ai placé à la droite du trait vertical, j'ai multiplié 30 par 5, pour avoir 5 fois la 7e. partie du D. C., ce qui m'a donné 150 que j'ai placé à la gauche du trait vertical ; or le numérateur 150 est les cinq septièmes du D. C. 210, comme le numérateur 5 de la fraction $\frac{5}{7}$ est les 5 septièmes de son dénominateur. Donc, en effet :

$$\frac{105}{210} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{140}{210} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{168}{210} = \frac{4}{5}$$
$$\frac{150}{210} = \frac{5}{7}$$

Il résulte de ce qui précède, le principe suivant :

224. Pour réduire des fractions quelconques au même dénominateur il faut, 1°. trouver le dénominateur commun ; 2°. pour avoir les numérateurs des fractions égales à $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, etc., il faut prendre la $\frac{1}{2}$, les $\frac{2}{3}$, les $\frac{4}{5}$, les $\frac{5}{7}$, etc., du dénominateur commun.

Manière générale de trouver le D. C.

Pour l'avoir, il ne s'agit que de former le produit de tous les dénominateurs des fractions proposées.

Manière générale d'avoir les numérateurs.

Pour avoir les numérateurs, il faut diviser le D. C. par le dénominateur de chacune des fractions qu'il s'agit de réduire au même dénominateur ; les quotiens seront les numérateurs que l'on cherche, lorsque les fractions à réduire au même dénominateur ont l'unité pour numérateur, telles que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, etc. (222).

Mais lorsque les fractions qu'il s'agit de réduire au même dénominateur, ont pour numérateur les nombres 2, 3, 4, 5, et ainsi de suite telles que $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, il faut, après avoir divisé le dénominateur commun par le dénominateur particu-

lier de la première de ces fractions, multiplier le quotient par le numérateur de cette première fraction; le résultat sera le numérateur d'une fraction qui aura pour dénominateur le D. C., et qui sera de même valeur que la première des fractions proposées, et ainsi de suite pour la 2e., la 3e., la 4e., etc., de ces fractions, pour chacune desquelles il faut faire les mêmes opérations que pour la première.

De la Manière d'avoir un plus petit dénominateur commun.

225. Mais, puisque le D. C. doit pouvoir être divisé sans reste par chacun des dénominateurs des fractions proposées (222), avant de former le produit de ces derniers, il est bon de vérifier si l'un d'entre eux n'a pas tous les autres au nombre de ses facteurs, ou quelques-uns des autres; car en ce cas il serait inutile de faire concourir ces autres à la formation du D. C. dont ils seraient déjà les facteurs.

On aperçoit facilement quels sont les dénominateurs qui sont facteurs dans d'autres, en cherchant à commencer par le plus petit, s'il est contenu une quantité quelconque de fois sans reste dans l'un des autres, et ainsi de suite pour chacun des plus petits, en observant de marquer d'un point ceux qui se trouvent contenus sans reste dans d'autres.

Le dénominateur qui se trouvera contenir chacun des autres un nombre exact de fois sera le D. C., à défaut le produit de tous les dénominateurs qui ne seront pas marqués d'un point sera le D. C.

Après quoi on opérera comme cela est déjà indiqué pour avoir les numérateurs (224).

1er. EXEMPLE.

Soit proposé de réduire au même dénominateur les fractions. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{23}{24}$.

24 D. C.

$\frac{1}{2}$.	=	$\frac{12}{24}$	12	Moitié du dédonminat. comm.			
$\frac{2}{3}$.	=	$\frac{16}{24}$	16	8 tiers de	*id.*	×	2
$\frac{3}{4}$.	=	$\frac{18}{24}$	18	6 quart de	*id.*	×	3
$\frac{5}{6}$.	=	$\frac{20}{24}$	20	4 sixième de	*id.*	×	5
$\frac{7}{8}$.	=	$\frac{21}{24}$	21	3 huitième de	*id.*	×	7
$\frac{11}{12}$.	=	$\frac{22}{24}$	22	2 douzième de	*id.*	×	11
$\frac{23}{24}$ D. C.	=	$\frac{23}{24}$	23	1 vingt-quatr^e^. de	*id.*	×	23

1°. Après avoir marqué d'un point les dénominateurs 2, 3, 4, 6, 8 et 12, contenus sans reste dans 24, ce dernier nombre a été pris pour D. C.;

2°. Ensuite, pour avoir les numérateurs on a pris la $\frac{1}{2}$, les $\frac{2}{3}$, les $\frac{3}{4}$, les $\frac{5}{6}$, les $\frac{7}{8}$, les $\frac{11}{12}$ et enfin les $\frac{23}{24}$ du D. C. Savoir : le tiers qu'on a multiplié par 2, le quart qu'on a multiplié par 3, et ainsi de suite, comme (223) :

2e. Exemple.

226. Soit proposé de réduire au même dénominateur les fractions suivantes :

1536 D. C.

$\frac{1}{2}$.	=	768		moitié du D. C.					1°.
$\frac{3}{4}$.	=	1152	384	quart	de *id.*	×	3		2°.
$\frac{7}{8}$.	=	1344	192	8e.	de *id.*	×	7		3°.
$\frac{15}{16}$.	=	1440	96	6e.	de *id.*	×	15		4°.
$\frac{31}{32}$.	=	1488	48	32e.	de *id.*	×	31		5°.
$\frac{63}{64}$.	=	1512	24	64e.	de *id.*	×	63		6°.
$\frac{191}{192}$.	=	1528	8	192e.	de *id.*	×	191		7°.
$\frac{191}{192}$.	=	1528	8	*idem*	de *id.*	×	191		8°.
$\frac{191}{384}$.	=	764	4	384e.	de *id.*	×	191		9°.
$\frac{191}{768}$.	=	382	2	768e.	de *id.*	×	191		10°.
$\frac{191}{1536}$.	=	191	1	1536e.	de *id.*	×	191		11°.

OPÉRATION.

Après avoir marqué d'un point tous les dénominateurs contenus exactement dans d'autres, et avoir reconnu par ce moyen que le dénominateur commun est 1536,

1°. J'ai pris, sur le D. C., la $\frac{1}{2}$ qui est 768;

2°. J'ai pris la $\frac{1}{2}$ de la $\frac{1}{2}$ ci-dessus, c'est-à-dire de 768, pour avoir le quart du D. C., lequel quart est 384, que j'ai multiplié ensuite par 3;

3°. J'ai pris la $\frac{1}{2}$ du quart ci-dessus, c'est-à-dire de 384, pour avoir le $\frac{1}{8}$ du D. C., lequel huitième est 192, que j'ai multiplié par 7;

4°. J'ai pris la $\frac{1}{2}$ du huitième ci-dessus, c'est-à-dire de 192, pour avoir le $\frac{1}{16}$ du D. C., lequel seizième est 96, que j'ai multiplié ensuite par 15.

5°. J'ai pris la $\frac{1}{2}$ du 16e. ci-dessus, qui est 96, pour avoir le 32e. du D. C., lequel trente-deuxième est 48, que j'ai multiplié par 31;

6°. J'ai pris la $\frac{1}{2}$ du 32e. ci-dessus, qui est 48, pour avoir le 64e. du D. C., lequel 64e. est 24, que j'ai multiplié par 63;

7°. J'ai pris le $\frac{1}{3}$ du 64e ci-dessus, lequel est 24 pour avoir le $\frac{1}{192}$ du D. C., lequel $\frac{1}{192}$ est 8, que j'ai multiplié par 191;

8°. Même opération que ci-dessus;

9°. J'ai pris la $\frac{1}{2}$ du 192e. ci-dessus, lequel est 8 pour avoir le 384e. du D. C., lequel 384e., est 4 que j'ai multiplié par 191.

10°. J'ai pris la $\frac{1}{2}$ du 384e. ci-dessus, lequel est 4, pour avoir le 768e. du D. C., lequel 768e. est 2, que j'ai multiplié par 191;

11°. Enfin, j'ai pris la $\frac{1}{2}$ du 786e. ci-dessus, qui est 2, pour avoir le 1536e. du D. C., lequel 1536e. est 1, que j'ai multiplié par 191.

Abréviation pour trouver les numérateurs.

227 Au lieu de diviser le D. C. par 4, par 8, par 16, par 32, par 64, par 192, par 384, par 768, et par 1536, c'est-à-dire, par chaque dénominateur particulier, ayant déjà pris la $\frac{1}{2}$ du D. C., la $\frac{1}{2}$ de cette $\frac{1}{2}$ m'a donné le quart du D. C.; la demie de ce quart m'a donné le $\frac{1}{8}$ du D. C.; la $\frac{1}{2}$ de ce $\frac{1}{8}$

m'a donné le $\frac{1}{16}$ du D. C.; la $\frac{1}{2}$ de ce $\frac{1}{16}$ m'a donné le $\frac{1}{32}$ du D. C.; la $\frac{1}{2}$ de ce $\frac{1}{32}$ m'a donné le $\frac{1}{64}$ du D. C.; le $\frac{1}{3}$ de ce $\frac{1}{64}$ m'a donné le $\frac{1}{192}$ du D. C.*, et ainsi de suite. Conséquemment:

228. Lorsqu'il s'agira d'avoir le quart du D. C., on prendra la moitié de la moitié; pour en avoir le huitième, on prendra la moitié de son quart; pour en avoir le seizieme, la moitié de son huitième, et ainsi de suite. En un mot, on prendra chaque partie, qu'il s'agira d'avoir du D. C., sur l'une des parties qu'on aura déjà prises; ce qui n'est praticable que pour des fractions dont les dénominateurs sont contenus une quantité exacte de fois dans l'un d'entre eux, comme (224) et (226)

3e. EXEMPLE.

229. Soit proposé de réduire au même dénominateur les fractions suivantes:

		24	
$\frac{1}{2}$. =	$\frac{12}{24}$	12	moitié du D. C.
$\frac{1}{3}$. =	$\frac{8}{24}$	8	tiers de *id.*
$\frac{1}{4}$ =	$\frac{6}{24}$	6	quart de *id.*
$\frac{1}{6}$ =	$\frac{4}{24}$	4	sixième de *id.*

OPÉRATION.

Après avoir marqué d'un point les dénominateurs 2 et 3, parce qu'ils sont contenus sans reste dans le dénominateur, en multipliant ensuite les dénominateurs 6 et 4 l'un par l'autre, on peut avoir le D. C., qui serait alors 24, dont on a pris la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$, le $\frac{1}{6}$, pour avoir les numérateurs des fractions d'un même dénominateur, égales aux quatre fractions proposées.

De la manière de trouver le plus petit dénominateur commun possible.

230. Mais on peut trouver une nouvelle abréviation, parce que les dénominateurs différens, qui ne se trouvent pas contenus sans reste dans d'autres, peuvent avoir des facteurs

qui leur soient communs. Pour vérifier s'ils en ont en effet, il faut décomposer chacun de ces dénominateurs en tous les nombres premiers qu'ils ont pour facteurs.

Par exemple, ayant les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, etc., après avoir marqué d'un point les dénominateurs 2 et 3 qui sont contenus dans 6 (229), on peut décomposer les dénominateurs 4 et 6 dans les nombres premiers (206) qu'ils ont pour facteurs, comme suit : $4 = 2 \times 2$, $6 = 3 \times 2$, afin de voir quelle est la puissance la plus élevée de chaque nombre premier qui se trouve être l'un des facteurs de ces mêmes dénominateurs 4 et 6.

Cela posé, on voit, à commencer par le plus petit nombre premier 2, qu'il est à sa seconde puissance dans 4 (215), tandis que dans $6 = 2 \times 3$ le nombre premier 2 n'est qu'à sa première puissance, laquelle est contenue un nombre exact de fois dans la seconde (219) ; je prends donc 4, seconde puissance de 2, pour l'un des facteurs du D. C. que je cherche, et je supprime 2 dans $2 \times 3 = 6$, parce que la première puissance de 2 est contenue dans la seconde puissance de ce même nombre; par ce moyen j'aurai pour facteur du D. C. 4 et 3 au lieu de 4 et 6, c'est-à-dire, au lieu d'avoir pour D. C. $4 \times 6 = 24$, j'aurai pour D. C. $4 \times 3 = 12$.

Or, pour avoir les numérateurs, je prendrais la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$, le $\frac{1}{6}$ du D. C. 12, j'aurai donc :

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$
$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$
$$\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$$

AUTRE EXEMPLE.

231. Ayant à réduire au même dénominateur les fractions suivantes.

			5940
$\frac{1}{3}$.	. . . .	=	1980
$\frac{1}{4}$.	. . . .	=	1485
$\frac{1}{5}$.	. . . .	=	1188
$\frac{1}{6}$.	. . . .	=	990
$\frac{1}{11}$	= 11	=	540
$\frac{1}{12}$.	. . . .	=	495
$\frac{1}{15}$.	. . . .	=	396
$\frac{1}{18}$	$= 3 \times 3 \times 2$. . . .	=	330
$\frac{1}{27}$	$= 3 \times 3 \times 3$. . .	=	220
$\frac{1}{60}$	$= 2 \times 2 \times 3 \times 5$	=	99

Après avoir marqué d'un point les dénominateurs 3, 4, 5, 6, 12 et 15, parce qu'ils sont contenus chacun un certain nombre de fois sans reste dans d'autres, et tous dans le dénominateur 60, j'ai décomposé en ses divers facteurs simples chaque dénominateur qui n'est pas marqué d'un point à l'exception de 11, qui, ainsi que tout autre nombre premier, n'a d'autres facteurs que lui-même et que l'unité; et voyant :

1°. Que le nombre premier 2 est à sa seconde puissance, dans 60 j'ai supprimé, par un trait de plume, la première puissance 2 qui se trouve être l'un des facteurs de 18, parce que cette première puissance de 2 est l'un des facteurs de la seconde puissance de ce même nombre 2;

2°. Voyant que 3 est à sa troisième puissance dans 27, tandis qu'il n'est qu'à sa première dans 60, et à sa seconde puissance dans 18, j'ai supprimé par un trait de plume la première puissance de 3 dans les facteurs de 60, et la seconde puissance de ce même nombre dans les facteurs de 18, parce que ces première et seconde puissances de 3 sont des facteurs de la troisième puissance de ce même nombre, et c'est ainsi que, la puissance la plus élevée de chaque nombre premier étant prise une seule fois pour facteur du D. C., que l'on cherche après avoir eu soin de supprimer toutes les puissances semblables aux inférieures, comme étant contenues sans reste dans celle qui

est prise pour facteur du D. C., on a le plus petit D. C. possible. Par ce moyen, dans l'exemple ci-dessus, j'ai eu pour facteurs du D. C. $11 \times 27 \times 4 \times 5 = 5940$; après quoi, pour avoir les numérateurs j'ai pris le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$, le $\frac{1}{6}$, et ainsi de suite du D. C. comme (224).

Donc en général :

232. Pour avoir le plus petit D. C. possible : 1°. il faut marquer d'un point chaque dénominateur qui se trouve contenu sans reste dans d'autres; et lorsque les dénominateurs qui ne sont pas marqués d'un point seront des nombres premiers, leur produit sera le D. C. ;

2°. Mais si ces dénominateurs peuvent être divisés sans reste, chacun une ou plusieurs fois successivement par 2, ensuite de même une ou plusieurs fois successivement par 3, puis de même par 5 et ainsi de suite par les nombres premiers 7, 11, etc. (*a*), on leur fera subir ces divisions, par le moyen desquelles on les décomposera en tous les nombres premiers qu'ils ont pour facteurs ; après quoi on prendra la puissance la plus élevée de chacun de ces nombres premiers pour facteur du D. C., et on supprimera toutes les puissances égales ou inférieures; le produit de ces nombres premiers, pris à leur puissance la plus élevée, sera le D. C. le plus petit possible;

3°. Lorsqu'il arrive que le dénominateur particulier de chacune des fractions à réduire au même denominateur se trouve contenu dans le dénominateur de l'une d'entre elles, ce dernier, qui contient tous les autres une quantité exacte de fois, est le D. C. (*b*);

4°. Enfin, lorsqu'on a le dénominateur commun, on opère comme ci-dessus (224) et (225) pour avoir les numérateurs.

(*a*) Il est rare, dans la pratique, qu'on ait à diviser les dénominateurs particuliers par d'autres nombres premiers que les suivans : 2, 3, 5 (206).

(*b*) Les réductions au même dénominateur ont le plus souvent pour objet de rendre possible l'addition des fractions ; or, ces fractions sont

De la réduction des fractions en unités qui ne sont que des subdivisions connues d'une unité principale, et réciproquement.

233. Les mesures de chaque espèce, dont l'usage est adopté dans chaque pays, y sont subdivisées en plusieurs autres de même espèce, et chaque mesure principale est représentée par une unité principale, que l'on subdivise en plusieurs unités d'un ordre inférieur, qui représentent les subdivisions de cette même mesure.

Par exemple, en France, la monnaie de compte avait autrefois pour unité 1 liv. tournois, que l'on divisait en 20 sous, et chaque sous était lui-même divisé en 12 deniers; or, l'unité étant une livre, $1 = 20^s. = 240^d.$

1 toise était divisée en 6 pieds, le pied en 12 pouces, le pouce en 12 lignes; or, l'unité principale étant une toise, 1 toise = 6 pieds = 72 pouces = 864 lig.

234. Il en résulte évidemment que les unités d'un ordre inférieur, qui expriment des subdivisions d'une unité principale, ne sont autre chose que des fractions. Par exemple, dans cette quantité 1 l. 11 s. 6 d., les 11 s. 6 d. ne sont autre que les $\frac{11}{20} + \frac{6}{240}$ de la livre dont 1 s. est la vingtième partie et 1 d. la deux cent quarantième; dans 1 toise 5 p. 7 po. 4 lig., les 5 pieds 7 pouces 4 lign. ne sont autre chose que les $\frac{5}{6} + \frac{7}{72} + \frac{4}{864}$ de la toise, à cause que le pied est la sixième partie de la toise, dont le pouce est la soixante douzième partie, et dont la ligne est la huit-cent soixante et quatrième partie (233). Donc:

235. Les subdivisions de l'unité principale peuvent être représentées par les unités d'un ordre inférieur qui sont des-

---

plus souvent le résultat de la multiplication de deux nombres fractionnaires ou complexes, dans laquelle on a soin de prendre chaque produit nouveau sur le précédent, afin que tous les dénominateurs soient contenus dans le dernier d'entre eux.

tinées à cet usage, ou par des fractions ordinaires qui expriment ces mêmes subdivisions (234), et réciproquement.

236. On peut exprimer la valeur d'une fraction ordinaire par les unités d'un ordre inférieur, qui ne sont que des subdivisions de l'unité principale dont cette même fraction exprime des parties.

237. Exprimer la valeur d'une fraction par les subdivisions connues de l'unité principale dont elle représente des parties, c'est la *réduire* en unités d'un ordre inférieur à celui de cette même unité principale, et en général exprimer la valeur d'un nombre qui a une certaine unité pour mesure, par un nombre qui a une autre unité pour mesure, c'est faire une *réduction* que les arithméticiens appellent *évaluation ou réduction.*

De l'évaluation des fractions ou de leur réduction en subdivisions des mesures en usage.

238. Évaluer une fraction c'est la réduire en subdivisions connues de l'unité principale dont elle exprime des parties.

Pour la réduire en ces subdivisions, il ne s'agit que de prendre son numérateur pour dividende (173) et son dénominateur pour diviseur, et que de considérer l'unité du dividende, comme étant de même nature que l'unité dont cette fraction exprime des parties (97), puis il faut opérer ensuite la division par les moyens ordinaires.

Le quotient sera la valeur de cette même fraction, réduite en subdivisions connues de l'unité dont elle exprime des parties (239) :

239. Qu'on demande, par exemple, ce que vaut la fraction $\frac{5}{17}$ d'une livre sterling, monnaie d'Angleterre, en sols et deniers sterling, sachant que la livre sterling vaut 20 sols sterling et le sol sterling 12 deniers sterling.

Prenant 5 pour dividende et 17 pour diviseur, je vois qu'il s'agit de diviser 5 l. sterling par 17, et d'en avoir la dix-septième partie en sols et deniers sterling. Cela posé, je réduis

d'abord en sols le dividende 5 liv.; or 5 l. $= 5 \times 20 = 100$ s. st., et je divise ces 100 s. par 17, ce qui me donne 5 s. st. au quotient et un reste de 15 s. st. Je réduis ensuite ces 15 s. en deniers sterl.; or, $15^s. = 15 \times 12^d.$ sterl. $= 180$ den. st., et je divise 180 den. s. par 17, ce qui me donne $10^d.$ sterl. au quotient et un reste de 10 den. à mettre en fraction ainsi: $\frac{10}{17}$, parce qu'après les den. il n'y a d'autre subdivision connue de la livre sterling que les fractions ordinaires. Ainsi les $\frac{5}{17}$ d'une livre sterling valent 5 s. 10 d. $\frac{10}{17}$ st.

Ayant divisé 345 liv. st. par 17, dont le reste est 5 liv. st., le quotient de 5 liv. st. divisé par 17 est $\frac{5}{17}$ (168), qu'on peut réduire en sous et deniers sterling, en opérant comme ci-dessus (239).

240. Que l'on propose encore d'évaluer la fraction $\frac{19}{20}$ de toise en subdivisions connues de la toise. Je vois qu'il s'agit de diviser 19 toises par 20, ou d'avoir la vingtième partie en pieds, pouc. et lig. Sachant donc que la toise vaut 6 pieds, le pied 12 pouces, et le pouce 12 lignes, je réduis d'abord les 19 toises en pieds, et je divise les 114 pieds qu'elles donnent par 20, ce qui donne au quotient 5 pieds et un reste de 14 pieds; je réduis ensuite ce reste en pouces, et je divise les 168 pouces qu'ils me donnent par 20, ce qui me donne 8 pouces au quotient et un reste de 8 pouces; je réduis encore ces pouc. en lign., et je divise les 96 lign. qu'ils me donnent par 20, ce qui me donne 4 lignes au quotient et un reste de 16 lignes à mettre en fractions. $\frac{19}{20}$ de toise valent donc 0 toises, 5 pieds, 8 pouces, 4 lignes et $\frac{16}{20}$ de ligne que l'on peut abandonner à cause de leur peu de valeur.

Ayant divisé 419 toises par 20, dont le reste est 19 toises, le quotient de ce reste est $\frac{19}{20}$ (168), qu'on peut réduire en pouces et en lignes, en opérant comme ci-dessus (240).

241. Un nombre tel que 5 s. 10 den. $\frac{10}{17}$ sterling (239), ou encore que 3 liv. 11 s. 6 d. sterling, ou que 0 toise, 5 pieds, 8 pouces, 4 lign., ou encore que 5 toises, 8 pieds, 7 pouc., 4 lignes (240), ou plus généralement, *tout nombre composé*

d'unités de différentes dénominations, et qui ne sont autre chose que des subdivisions d'une unité principale, d'une dénomination connue et reçue par l'usage, ou que des fractions de cette même unité, est ce qu'on appelle un nombre complexe.

242. Les nombres complexes qui contiennent plusieurs fois l'unité principale, ou qui sont composés d'entiers accompagnés des fractions d'une dénomination connue et reçue par l'usage, ne sont autre chose que des nombres fractionnaires; on les appelle complexes seulement, parce que les subdivisions de l'unité principale, ou les fractions dans lesquelles on la subdivise, ayant une dénomination connue et adoptée par l'usage, qui tient lieu des dénominateurs des fractions ordinaires, permet qu'on prenne dans certains cas l'une ou l'autre de ces subdivisions pour unité principale.

Mais, placées à la suite des unités principales, ces subdivisions ne sont autre chose que des fractions sous une autre forme que celles des fractions ordinaires.

On peut donc facilement réduire aussi les nombres complexes en fractions ordinaires.

De la réduction d'un nombre complexe en une fraction ordinaire.

243. Pour réduire un nombre complexe en une fraction ordinaire,

Il faut réduire ce nombre en unités de la plus petite espèce de toutes celles qui le composent.

La totalité des unités de la plus petite espèce à laquelle il se réduira, sera le numérateur d'une fraction, à laquelle il faut donner pour dénominateur le nombre qui exprime combien il faut de ces unités inférieures pour composer l'unité principale dont elles font partie.

Qu'on demande, par exemple, quelle est la fraction d'une livre sterling égale à 19 sous 6 deniers sterling., ou, en d'au-

tres termes, de réduire 19 sous 6 deniers en une fraction ordinaire de la liv. st.; je réduis les 19 s. en deniers, j'ajoute au produit les 6 d. dont ils sont accompagnés, et je considère les 234 deniers qu'ils me donnent comme le numérateur d'une fraction qni doit avoir 240 pour dénominateur, parce que la livre sterling, qui vaut 20 sous sterling, qui valent chacun 12 d., vaut évidemment 20 fois 12 d. ou 240 d. st.; d'où il suit que 1 d. ou $\frac{1}{240}$ de la liv. st. n'est qu'une même chose, et que 234 deniers $= \frac{234}{240}$ de la liv. st.

Qu'on propose encore de réduire o toise 5 pieds 8 pouces 4 lign. en une fraction de la toise, je réduis d'abord les 5 pieds en pouces, et j'ajoute les 8 pouces qui sont joints aux cinq pieds, ensuite je réduis les 68 pouces qu'ils me donnent en lignes, auxquelles j'ajoute les 4 lignes qui sont jointes aux 8 pouces du nombre complexe sur lequel j'opère, et je considère les 820 lignes qu'ils me donnent comme le numérateur d'une fraction qui a le nombre 864 pour dénominateur, parce que la toise qui vaut 6 pieds, lesquels valent chacun 12 pouc., qui valent eux-mêmes chacun 12 lignes, vaut évidemment 1 toise $\times$ 6 pieds $\times$ 12 pouces $\times$ 12 lignes $=$ 864 lignes, d'où il suit qu'une ligne ou $\frac{1}{864}$ de la toise n'est qu'une même chose, et que 820 lign. $= \frac{820}{864}$ de la toise. o toise, 5 pieds, 8 pouces 4 lignes valent donc $\frac{820}{864}$ de la toise. Il en serait de même d'un nombre composé d'une quantité quelconque de toises et de parties de la toise, ou de livres sterling et de ses différentes parties, etc., on réduirait les toises en pieds, et on ajouterait au produit les pieds dont elles se trouveraient accompagnées, etc.; et les liv. sterling en sous, en y ajoutant les sous dont elles seraient accompagnées, et ainsi de suite, quelle que fût l'espèce de l'unité principale.

On peut également réduire des fractions ordinaires ou des nombres complexes en fractions décimales, et réciproquement.

De la réduction des fractions ordinaires en fractions décimales

244. Réduire une fraction ordinaire en parties de dix en dix fois plus petites que l'unité, c'est ce qu'on appelle réduire une fraction ordinaire en fractions décimales.

245. Pour réduire une fraction ordinaire en fractions décimales, il faut prendre le numérateur pour dividende, et le dénominateur pour diviseur (173); il faut ensuite opérer comme dans la division d'un nombre plus petit que le diviseur dont on veut avoir le quotient en parties décimales (159). En un mot, cette opération est absolument la même que celle par laquelle il s'agit d'avoir en parties décimales le quotient d'une division dont le dividende est plus petit que le diviseur. Ainsi, tout ce qui est dit des divisions de cette nature est applicable aux réductions des fractions ordinaires en fractions décimales. Par ex., pour réduire $\frac{5}{17}$ en parties décimales, opérez comme (159); et réciproquement on peut convertir les fractions décimales en fractions ordinaires.

De la réduction d'une fraction décimale en une fraction ordinaire.

246. On sait qu'une fraction décimale exprime des dixièmes, des centièmes, des millièmes, etc., selon qu'elle est exprimée par 1, 2 ou 3 chiffres, etc., placés à la droite d'une virgule qui sépare les décimales des entiers (38). Toute fraction décimale peut donc être considérée comme le numérateur d'une fraction ordinaire, qui a l'un des nombres 10, 100, 1000, etc., pour dénominateur, selon que cette même fraction décimale est exprimée par 1, 2 ou 3 chiffres, etc., placés à la droite d'une virgule. Donc, en général:

247. Pour réduire ou transformer une fraction décimale en une fraction ordinaire, il ne s'agit que de prendre le nombre par lequel elle est exprimée, pour numérateur d'une fraction à laquelle on donne 10, 100 ou 1000, etc., pour dénomina-

teur selon que le nombre qui exprime la fraction décimale est exprimé lui-même par 1, 2 ou trois chiffres, etc., placés à la droite d'une virgule; en un mot, à laquelle on donne l'unité pour dénominateur, suivie d'autant de zéro qu'il y a de chiffres au rang des décimales, dans le nombre par lequel cette même fraction décimale est exprimée. Soit, par exemple, la fraction décimale 0, 3 que l'on veut réduire ou convertir en une fraction ordinaire, ou, en d'autres termes encore, que l'on veut représenter sous la forme d'une fraction ordinaire : je prends le nombre 3 pour numérateur d'une fraction à laquelle je donne le nombre 10 pour dénominateur, j'ai par ce moyen $\frac{3}{10} = 0,3$. Soit encore le nombre 0,45 à mettre sous la forme d'une fraction ordinaire; je prends 45 pour numérateur d'une fraction à laquelle je donne 100 pour dénominateur; j'ai par ce moyen $\frac{45}{100} = 0,45$. Soit encore 0,975, ou 0,000075 à mettre sous la forme d'une fraction ordinaire, j'ai $\frac{975}{1000} = 0,975$ ou $\frac{75}{1000000} = 0,000075$.

De la réduction d'un nombre complexe en une fraction décimale approximative.

248. Pour réduire un nombre complexe (241) en une fraction d'une valeur égale ou approximative, il faut d'abord réduire le nombre complexe en une fraction ordinaire (243); il ne s'agit plus ensuite que de réduire cette fraction en une fraction décimale, par le moyen déjà indiqué (245).

Que l'on propose, par exemple, de réduire 19 s. 6 d. st. en une fraction décimale de la liv. st., je réduis d'abord les 19 s. 6 d. en fraction ordinaire (243), je réduis ensuite la fraction $\frac{234}{240}$ d'une livre sterling qu'ils me donnent en une fraction décimale d'égale valeur, en divisant le numérateur par le dénominateur, de la manière déjà indiquée (244) : je trouve au quotient 0,975 millièmes.

2340	240.
1800	0,975
1200	

249. Il serait à désirer que toutes les nations civilisées adoptassent le système décimal, pour les subdivisions des poids et des mesures dont l'usage est établi chez chacune d'elles, et même pour les subdivisions des monnaies qui ont cours chez chacune, comme on l'a fait en France.

Par ce moyen, toutes les différentes subdivisions des poids, des mesures et des monnaies de chaque pays, étant soumises aux lois de la numération, mettraient à même d'opérer sur leurs différentes parties, comme sur des nombres entiers.

L'opération qui vient d'être indiquée (248) servira à réduire les différentes subdivisions des poids, des mesures et des monnaies de chaque nation, en parties décimales de ces mêmes poids, de ces mêmes mesures et de ces mêmes monnaies, lorsqu'on voudra leur faire subir cette transformation, afin de pouvoir opérer sur ces parties décimales comme sur des nombres entiers.

Lorsqu'on a une fraction décimale d'une unité d'une nature quelconque, on peut aussi, sans aucune difficulté, ramener cette fraction décimale aux subdivisions reçues par l'usage de cette même unité, ou la transformer en ces subdivisions.

De la réduction d'une fraction décimale en un nombre complexe.

250. Pour réduire une fraction décimale en subdivisions connues et reçues par l'usage de l'unité principale, dont elle exprime des parties, il faut d'abord mettre cette fraction décimale sous la forme d'une fraction ordinaire, ou, en d'autres termes, il faut la réduire en une fraction ordinaire. Il faut ensuite opérer comme dans le cas où il s'agit de réduire ou d'évaluer une fraction ordinaire en subdivisions connues de l'unité principale dont elle exprime des parties (239).

Des quatre opérations de l'arithmétique sur les fractions de l'addition.

251. *Pour additionner des fractions qui ont des dénomina-*

teurs différens, il faut d'abord les réduire toutes en fractions d'un dénominateur commun; (224) *il faut ensuite additionner les numérateurs de ces nouvelles fractions*. La somme est un numérateur composé des mêmes parties que les numérateurs qu'on a additionnés (181), auquel il faut donner par cette raison pour dénominateur, le *dénominateur commun*, et qui compose ainsi une fraction qu'il faut réduire en entiers si elle en contient (193).

Par exemple, si on propose d'additionner les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, je les réduis d'abord en fractions d'un même dénominateur par les moyens déjà indiqués (224); j'additionne ensuite les numérateurs des fractions $\frac{105}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{168}{210}$, $\frac{150}{210}$, égales aux fractions proposées, la somme est $\frac{563}{210} = 2. \frac{143}{210}$.

OPÉRATION.

	210 D. C.	
$\frac{1}{2}$	105	
$\frac{2}{3}$	140	70
$\frac{4}{5}$	168	42
$\frac{5}{7}$	150	30
	563 / 210 $= 2. \frac{143}{210}$	

De la soustraction des fractions.

252. *Lorsque les fractions à soustraire l'une de l'autre ont des dénominateurs différens, il faut d'abord les réduire au même dénominateur* (224), *après quoi on soustrait le numérateur de l'une de celui de l'autre; le reste est le numérateur d'une fraction qui a pour dénominateur le dénominateur commun.*

Par exemple, si on propose de soustraire $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, je réduis ces fractions en fractions d'un même dénominateur, qui sont $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$, puis retranchant 8 de 9, il me reste $\frac{1}{12}$.

OPÉRATION.

	12 D.	C.
$\frac{3}{4}$	9	3
$\frac{2}{3}$	8	4
Reste	1	12

253. On pourrait réduire en fractions décimales les fractions ordinaires qu'il s'agit d'additionner, ou au contraire de soustraire l'une de l'autre, et faire ensuite l'addition, ou la soustraction de ces décimales.

De la multiplication et de la division d'une fraction par un nombre entier.

254. *Pour multiplier une fraction par un nombre entier, il faut en multiplier le numérateur* (174) *ou en diviser le dénominateur* (175) *par le nombre proposé, sans rien changer à l'autre terme de la fraction.*

Par exemple, ayant à multiplier $\frac{2}{9}$ par 3, on peut multiplier le numérateur par 3, ou diviser au contraire le dénominateur par 3, le résultat de la première opération sera $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, résultat de la seconde (176).

255. On peut encore multiplier une fraction par le nombre entier qu'elle a pour dénominateur, en supprimant son dénominateur. Par exemple, on aura multiplié la fraction $\frac{3}{4}$ par 4, si on en supprime le dénominateur 4; en effet, le numérateur 3, qui sera le produit, exprime alors 3 unités; or on aurait le même résultat si on multipliait le numérateur de la fraction $\frac{3}{4}$ par 4, car $\frac{3}{4}$ multiplié par $4 = \frac{12}{4} = 3$ (*a*). Ainsi :

256. *Supprimer le dénominateur d'une fraction, c'est la multiplier par ce même dénominateur* (255).

(*a*) Diviser le dénominateur 4 par lui-même, c'est multiplier la fraction par 4 (176) ; or, 4 étant divisé par 4, on aura l'unité pour dénominateur. Donc, au lieu de $\frac{3}{4}$ on aura $\frac{3}{1} = 3$.

257. Pour diviser une fraction par un nombre entier, il faut diviser son numérateur (174) ou multiplier son dénominateur (175) par le diviseur proposé, sans rien changer à l'autre terme de la fraction. Par exemple : ayant à diviser $\frac{6}{9}$ par 3, on peut diviser le numérateur par 3, ou multiplier au contraire le dénominateur par 3, le résultat de la première opération sera $\frac{2}{9}=\frac{6}{27}$, résultat de la seconde (175).

258. Enfin, pour multiplier une fraction par un nombre entier, un peu grand, on peut prendre ce dernier pour multiplicande et la fraction pour multiplicateur (66) ; on opère ensuite comme lorsqu'il s'agit de multiplier un nombre entier par une fraction (261).

De la multiplication d'un nombre entier par une fraction.

259. Lorsque le multiplicateur est 1 ou l'unité, on sait qu'il faut prendre le multiplicande une fois, et que le produit est égal au multiplicande (71).

Lorsque le multiplicateur ne contient que la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$, le $\frac{1}{5}$, etc. de l'unité, ou que les $\frac{2}{3}$, les $\frac{3}{4}$, les $\frac{4}{5}$, etc., de l'unité, le produit ne doit contenir de même à proportion que la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$, le $\frac{1}{5}$, etc., ou que 2 fois le tiers, 3 fois le quart, 4 fois le cinquième, etc., du multiplicande. Pour avoir ce produit, il ne s'agit donc que de prendre la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$, le $\frac{1}{5}$, etc., ou que les $\frac{2}{3}$, les $\frac{3}{4}$, les $\frac{4}{5}$, etc., du multiplicande. Conséquemment :

260. *Multiplier par une fraction, c'est prendre des parties du multiplicande, marquées par la fraction multiplicateur* (259).

Or, prendre la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$, le $\frac{1}{5}$, etc., du multiplicande, c'est le diviser par 2, par 3, par 4, par 5, etc. ; en prendre les $\frac{2}{3}$, les $\frac{3}{4}$, les $\frac{4}{5}$, etc., ou 2 fois le tiers, 3 fois le quart, 4 fois le cinquième, etc., c'est d'abord le diviser par 3, par 4 ou par 5, etc., et ensuite c'est multiplier ce tiers par 2, ce quart par 3, ou ce cinquième par 4, etc., pour avoir les $\frac{2}{3}$, les $\frac{3}{4}$, les $\frac{4}{5}$, etc., du multiplicande. Donc en général :

261. *Pour multiplier par une fraction, il faut d'abord diviser le multiplicande par le dénominateur de la fraction multiplicateur, et ensuite multiplier le résultat par le numérateur de cette fraction.*

Par exemple : si on propose de multiplier 35 par $\frac{4}{7}$, je vois qu'il ne s'agit que de prendre les $\frac{4}{7}$ de 35. Je divise donc d'abord 35 par 7 pour en avoir la septième partie qui est 5; et je multiplie ensuite 5 par 4, dont le produit 20 contient en effet les $\frac{4}{7}$ de 35.

Si on proposait de multiplier une fraction par une fraction, il faudrait opérer sur les mêmes principes.

De la multiplication d'une fraction par une fraction.

262. Supposons qu'on eût à multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{7}$: il est évident qu'il ne s'agit que de prendre 4 fois la septième partie de $\frac{2}{3}$, ou que de prendre les $\frac{4}{7}$ du multiplicande. L'opération se réduirait donc à diviser d'abord $\frac{2}{3}$ par 7 pour en avoir la septième partie, et à multiplier ensuite le résultat par 4 (261).

Or, la première de ces deux opérations s'effectuera en multipliant par 3 le dénominateur du multiplicande $\frac{2}{3}$ (175); et la seconde, en multipliant par 4 le numérateur du multiplicande $\frac{2}{3}$, ce qui donnera pour le produit cherché $\frac{8}{21}$.

Mais multiplier le dénominateur de $\frac{2}{3}$ par 7, c'est le multiplier par le dénominateur du multiplicateur $\frac{4}{7}$; de même multiplier le numérateur de $\frac{2}{3}$ par 4, c'est le multiplier par le numérateur du multiplicateur $\frac{4}{7}$. Donc en général :

263. *Pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier le numérateur de l'une par celui de l'autre, et les dénominateurs également l'un par l'autre, dont il faut placer le produit au-dessous de celui des numérateurs, ce qui compose une fraction qui est le produit de deux fractions proposées.*

264. Autre démonstration. Ayant à multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{7}$, par exemple, supprimez pour un moment le dénominateur

de $\frac{4}{7}$, vous aurez alors 4 pour multiplicateur, or en multipliant ensuite $\frac{2}{3}$ par 4, le produit sera $\frac{8}{3}$ (174); mais, comme vous avez rendu le multiplicateur 7 fois trop grand (256), le produit est aussi 7 fois trop grand (123); il faut donc le diviser par 7 pour le réduire à sa juste valeur, qui est $\frac{8}{21}$. Ainsi, pour avoir ce produit, il a fallu d'abord multiplier le numérateur de $\frac{2}{3}$ par 4, numérateur de $\frac{4}{7}$, et ensuite multiplier le dénominateur de $\frac{2}{3}$ par 7, dénominateur de $\frac{4}{7}$. Donc (263) :

265. Observez que multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{7}$, par exemple, c'est prendre les $\frac{4}{7}$ de $\frac{2}{3}$, qu'ainsi le produit $\frac{8}{21}$ n'est autre chose qu'une fraction de fraction, et qu'il en serait de même quelles que fussent les fractions proposées. Donc :

Le produit de deux fractions n'est autre chose qu'une fraction de fraction.

Des fractions de fractions.

266. Multiplier plusieurs fractions les unes pas les autres, savoir : deux de ces fractions l'une par l'autre, leur produit par une troisieme, le produit de ces trois par une quatrième, et ainsi de suite, c'est prendre successivement *des fractions de fractions*.

Par exemple : multiplier les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, savoir, les deux premières l'une par l'autre, leur produit par la troisième, c'est prendre les $\frac{3}{7}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$. En effet, multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, dont le produit est $\frac{8}{15}$, c'est prendre les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ (265); multiplier ensuite $\frac{8}{15}$ par $\frac{3}{7}$, dont le produit est $\frac{24}{105}$, c'est prendre les $\frac{3}{7}$ de $\frac{8}{15}$; mais, comme $\frac{8}{15}$ sont eux-mêmes les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, prendre les $\frac{3}{7}$ de $\frac{8}{15}$, c'est prendre les $\frac{3}{7}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$; et ainsi de suite s'il s'agissait d'avoir le produit de quatre, cinq ou six fractions, etc.

Observez, 1°. que multiplier le numérateur d'une fraction, qui est le produit de deux autres fractions, par le numérateur d'un troisième, c'est former le produit des numérateurs des 3 fractions proposées ; 2°. également, que multiplier le dénominateur de la fraction qui est le produit de

deux autres, par le dénominateur d'une troisième, c'est former le produit des dénominateurs de ces trois fractions, et ainsi de suite si on proposait de former le produit de 4, 5 ou 6, etc., fractions. Donc :

267. *Pour avoir le produit d'autant de fractions que l'on voudra, ou, en d'autres termes, pour prendre une fraction d'une fraction, qui est elle-même une fraction d'une autre fraction, etc., il faut former le produit de tous les numérateurs des fractions proposées et de tous leurs dénominateurs* (266); *le produit sera une fraction, dont le numérateur aura pour facteurs tous les numérateurs des fractions proposées, et dont le dénominateur aura également pour facteurs tous leurs dénominateurs.*

Si on propose, par exemple, d'avoir le produit des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{9}$, on l'obtient en multipliant le produit des 2 premiers par la troisième, et de ces trois par la quatrième; ou, ce qui est la même chose en d'autres termes, si on propose de prendre les $\frac{8}{9}$ des $\frac{6}{7}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, je vois qu'il ne s'agit que de former le produit de tous les numérateurs de ces différentes fractions, et que de former celui de tous leurs dénominateurs; or, on sait qu'on peut indiquer un produit (210), le produit sera donc :

$$\frac{2\times4\times6\times8}{3\times5\times7\times9}=\frac{384}{945}.$$

268. Et observons encore, avant de passer outre, qu'on peut appliquer à la fraction qui est le produit de plusieurs fractions, tout ce qui a été dit des changemens que l'on peut faire aux deux termes d'une division; en sorte qu'une fraction, dont les deux termes sont indiqués par tous les facteurs dont ils doivent être les produits, reste la même ou ne change pas de valeur, lorsqu'on supprime tous les facteurs communs au numérateur et au dénominateur (*a*), et

(*a*) Supprimer le facteur 3, par exemple, au numérateur, c'est rendre le produit des numérateurs 3 fois plus petit; mais en suppri-

lorsqu'on prend ensuite des parties égales sur l'un des facteurs restant du numérateur, et sur l'un de ceux du dénominateur (*a*) autant de fois qu'on le peut sans reste ; en un mot, lorsqu'on fait des changemens égaux à l'un des facteurs du numérateur et du dénominateur. Conséquemment :

269. Lorsqu'on connaît les différens facteurs du numérateur et du dénominateur, si on a l'attention de ne faire qu'indiquer la multiplication dont le numérateur doit être le produit, ainsi que celle dont le dénominateur doit être le produit, il suffira ensuite d'effacer les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, et de prendre des parties égales sur l'un des facteurs restans de l'un et sur l'un des facteurs restans de l'autre, autant de fois que l'on pourra sans reste, pour avoir la fraction réduite à sa plus simple expression, en formant le produit des facteurs qui restent ou qui sont substitués à ceux qu'on a réduits.

Si on propose, par exemple, d'avoir le produit des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, ou, ce qui est la même chose en d'autres termes, si on propose de prendre les $\frac{8}{9}$ des $\frac{7}{8}$, des $\frac{6}{7}$ des $\frac{5}{6}$ des $\frac{4}{5}$ des $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$, je vois qu'il ne s'agit que de former le produit de tous les numérateurs et de tous les dénominateurs de ces différentes fractions ; le produit sera donc :

$$\frac{2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}{3\times4\times5\times6\times7\times8\times9}=\frac{2}{9},$$

en supprimant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur (*b*).

---

mant ce même facteur 3 au dénominateur, c'est rendre le produit des dénominateurs aussi 3 fois plus petit ; de même supprimer les facteurs 4 ou 5, etc., tant au numérateur qu'au dénominateur, c'est rendre le numérateur et le dénominateur 4 ou 5 fois plus petit l'un et l'autre, et ainsi de suite.

(*a*) Ce qui ne change rien à la fraction (142), et en réduit les facteurs à leur plus simple expression.

(*b*) Les fractions de fractions méritent une attention particulière, parce

Le produit étant $\frac{2}{9}$, si on connaît la nature de l'unité dont cette fraction exprime des parties, on réduira en ces parties les fractions $\frac{2}{9}$, suivant la règle déjà établie (238).

270. Par exemple encore, si on propose d'avoir le produit des fractions

$$\frac{1 \times \overset{1}{3} \times 3 \times 5 \times 4 \times \overset{4}{8} \times 9 \times \overset{7}{14} \times 6}{\underset{1}{2} \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 9 \times \underset{5}{10} \times \underset{5}{15} \times 11} = \frac{12}{275}.$$

1°. J'ai effacé les facteurs 4, 5, 6, 9, tant au numérateur qu'au dénominateur; 2°. j'ai pris la moitié de 8 et celle de 14, facteurs du numérateur que j'ai effacés, et auxquels j'ai substitué leurs moitiés qui sont 4 et 7, après quoi j'ai pris la moitié de 2 et celle de 10, facteurs du dénominateur, que j'ai effacés, et auxquels j'ai substitué leur moitié 1 et 5; 3°. j'ai pris le tiers du facteur 3 du numérateur, et du facteur 15 du dénominateur, facteurs que j'ai effacés, et auxquels j'ai substitué 1 et 5; 4°. j'ai effacé le facteur 7 du numérateur, et le facteur 7 du dénominateur, ainsi que les unités qui sont facteurs dans le numérateur et le dénominateur, parce que l'unité, étant facteur, ne change rien au produit (71).

Par ce moyen, les deux termes de la fraction réduite à sa plus simple expression, ont pour facteurs

$$\frac{4 \times 3}{5 \times 5 \times 11} = \frac{12}{275}.$$

271. Lorsqu'en supprimant tous les facteurs communs aux deux termes d'une division ou d'une fraction, il arrive que l'on supprime tous ceux du dividende ou du diviseur, ce terme se trouve réduit à l'unité; en effet, supprimer, par exemple, le facteur 3 au dividende, c'est comme si on divi-

---

que la réduction des poids, mesures et monnaies d'un pays, en poids, mesures et monnaies d'un autre pays, n'est autre chose que l'application de la règle par laquelle on obtient le produit d'un nombre de fractions quelconques. Voyez mon *Arithmétique pratique*, pag. 176, 1re. partie.

sait ce facteur 3 par 3, dont le quotient serait l'unité; et c'est aussi comme si on divisait le dividende par 3 (268); de même supprimer les facteur 4, 5, etc., c'est diviser 4, 5, par 4, 5, etc., dont le quotient serait l'unité. Or, tous les facteurs d'un dividende étant réduits à l'unité, il est évident que le dividende sera l'unité; et il en serait de même du diviseur, ainsi que des deux termes d'une fraction. Donc :

272. *Lorsqu'en supprimant tous les facteurs communs aux deux termes d'une division ou d'une fraction, et qu'en prenant des parties égales sur l'un et l'autre, ils se trouvent réduits l'un et l'autre à l'unité, le quotient ou la fraction n'est autre chose que l'unité.* Par exemple :

$$\frac{2 \times 3 \times 4}{3 \times 4 \times 2} = \frac{24}{24} = \frac{1}{1} = 1.$$

273. Lorsqu'en supprimant tous les facteurs communs aux deux termes le résultat est une fraction qui contient des entiers, on la réduit en entier (193).

De la division d'un nombre entier par une fraction.

274. On peut réduire cette division à celle de deux nombres entiers, en supprimant le dénominateur de la fraction diviseur (255), et en multipliant par ce même dénominateur le dividende, pour y faire le même changement qu'au diviseur (141), apres quoi on aura un nombre entier pour diviseur et pour dividende, et il ne s'agira plus que d'opérer la division par les moyens ordinaires. Par exemple, ayant 60 à diviser par $\frac{3}{4}$, je supprime le dénominateur 4, par lequel je multiplie 60; j'ai alors 3 pour diviseur, et 240 pour dividende, dont le quotient est 80. Également :

275. *Pour diviser par une fraction, on peut diviser le dividende par le numérateur de la fraction diviseur, et après cela multiplier le quotient par le dénominateur de cette même fraction.* Par exemple, ayant à diviser 60 par $\frac{3}{4}$, on peut opérer d'abord comme s'il s'agissait de diviser 60 par 3,

en supprimant pour un instant le dénominateur 4; mais alors le diviseur étant 4 fois trop grand (255), et par conséquent le quotient étant 4 fois trop petit (139), pour ramener ce dernier à sa véritable valeur, il faut le multiplier par le dénominateur 4.

On opère sur les mêmes principes pour diviser une fraction par une fraction.

De la division d'une fraction par une fraction.

276. Par exemple : soit proposé de diviser $\frac{8}{21}$ par $\frac{4}{7}$, en supprimant pour un instant le dénominateur 7 du diviseur, l'opération se réduit à diviser $\frac{8}{21}$ par 4 (175), et ensuite à multiplier le quotient $\frac{8}{84}$ par 7, ce qui donne $\frac{56}{84} = \frac{2}{3}$ pour quotient exact. En effet, ayant supprimé le dénominateur de $\frac{4}{7}$, le diviseur, qui est alors 4, est à la vérité 7 fois trop grand (256), ce qui donne un quotient 7 fois trop petit (139); mais on ramène ce quotient à sa véritable valeur, en le multipliant ensuite par 7. Donc en général :

277. *Pour diviser une fraction par une fraction, il faut multiplier le dénominatenr du dividende par le numérateur du diviseur, ce qui donnera le dénominateur du quotient; et multiplier ensuite le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur, ce qui donnera le numérateur du quotient. Ou encore :*

278. Il faut multiplier la fraction dividende par la fraction diviseur renversée. En effet, ayant $\frac{8}{21}$ à diviser par $\frac{4}{7}$, en renversant les termes du diviseur, c'est-à-dire, en mettant 7 à la place de 4, et 4 à la place de 7, et en multipliant ensuite $\frac{8}{21}$ par $\frac{7}{4}$, savoir, numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur, le dénominateur 21 du dividende se trouvera multiplié par le numérateur 4 du diviseur, et le numérateur 8 du dividende se trouvera multiplié par le dénominateur 7 du diviseur, comme ci-dessus (277). Ainsi :

279. *La division d'une fraction par une fraction se réduit*

à la multiplication de la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.

280. On peut de même réduire la division de deux fractions à celle de deux nombres entiers, en supprimant le dénominateur du diviseur (256), ainsi que celui du dividende (256); ensuite en multipliant le dividende par le dénominateur du diviseur (141), et ce dernier par le dénominateur du dividende; par ce moyen, chacun des deux termes de la division se trouvera avoir été multiplié par les dénominateurs de ces mêmes termes, ce qui ne change rien au quotient.

Et il ne restera plus qu'à diviser le dividende par le diviseur, selon les moyens ordinaires.

Par exemple, ayant à diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, en supprimant les dénominateurs, etc., j'aurai le numérateur 4×3 pour dividende, et le numérateur 2×5 pour diviseur; j'aurai donc 12 à diviser par $10 = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10} = 1\frac{1}{5}$, en opérant la division, et en réduisant le quotient $\frac{12}{10}$ à sa plus simple expression.

Des opérations de l'arithmétique sur les nombres fractionnaires ou complexes.

281. La règle relative à chacune des quatre opérations de l'arithmétique, est la même pour les nombres complexes que pour les nombres fractionnaires (242). Il suffit que l'on connaisse bien distinctement l'unité principale des nombres complexes sur lesquels on doit opérer, et les parties dans lesquelles on la subdivise, qui ne sont autre chose que des fractions (242), pour qu'on n'éprouve aucune difficulté.

282. Nous observerons seulement, à l'occasion des nombres fractionnaires ou complexes, avant de passer outre, que 10 sous, 5 sous, 2 sous, par exemple, étant contenus respectivement 2 fois, 4 fois, 10 fois, sans reste, dans 1 l. = 20 sous; la livre peut être considérée comme étant composée de 2 *parties égales* telles que 10 s., de 4 telles que 5 s., de 10 telles que 2 s., et que ces parties se nomment *aliquotes*. Et qu'en général :

283. *Toute quantité qui est contenue un nombre exact de fois dans un autre, est ce qu'on appelle une partie aliquote de cette autre.*

Qu'ainsi, pour simplifier la multiplication des nombres complexes, 1°. on peut décomposer les fractions qui accompagnent le multiplicande ou le multiplicateur en des *parties aliquotes* d'une valeur égale à celle de ces mêmes fractions. Par exemple : $\frac{7}{8}$ ainsi : $\frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$; 7 onces 7 gros 1 denier, ainsi : 4 onces + 2 onces + 1 once + 4 gros + 2 gros + 1 gros + 1 denier = 7 onces 7 gros 1 denier, qui sont en même temps parties aliquotes de leur unité, et parties aliquotes les unes des autres; et ainsi de suite pour toute autre fraction ou tout autre nombre complexe; 2°. on peut opérer la multiplication par les parties aliquotes, au lieu de l'opérer par les fractions dont elles sont la valeur.

De l'addition des nombres fractionnaires ou complexes.

284. Pour faire une addition de ce genre :

1°. *Additionnez les fractions* (251), *retenez les entiers que la somme contient, et n'écrivez que la fraction qui les accompagne, au-dessous des fractions que vous avez additionnées.*

2°. *Additionnez ensuite les entiers auxquels il faut ajouter ceux retenus de l'opération précédente.*

Addition de nombres fractionnaires.

		24	
3	$\frac{1}{2}$	12	
5	$\frac{2}{3}$	16	8
3	$\frac{3}{4}$	18	6
4	$\frac{5}{6}$	20	4
7	$\frac{7}{8}$	21	3
9	$\frac{11}{24}$	11	1
5	$\frac{7}{12}$	14	2
40	$\frac{2}{3}$	112	24

$4 \frac{16}{24} = 4 \frac{2}{3}$

Dans cet exemple, la somme des fractions étant $\frac{112}{24} = 4\frac{16}{24} = 4\frac{2}{3}$, j'ai écrit les $\frac{2}{3}$ sous les fractions, et j'ai ensuite additionné les entiers, auxquels j'ai ajouté les 4 entiers retenus de la somme des fractions. La somme totale est $40\frac{2}{3}$.

Addition des nombres complexes.

285. On ne peut additionner les nombres de ce genre qu'autant qu'ils ont chacun la même unité principale, subdivisée dans les mêmes parties, que l'on considère comme des unités d'un ordre inférieur (233); et la somme doit avoir nécessairement la même unité principale que les nombres additionnés. Cela posé:

286. Après avoir écrit selon la règle établie (49) les nombres complexes que l'on veut additionner, *il faut faire l'addition de chaque colonne successivement, à commencer par celle des unités du plus petit ordre à droite, en observant de réduire la somme de chaque colonne en unités de même ordre que celle de la colonne suivante à gauche, pour les additionner avec ces dernières; et de n'écrire sous chaque colonne, à mesure qu'on en fait l'addition, que les unités du même ordre que celles qui y sont comprises, comme pour les nombres entiers* (50).

La différence consiste uniquement en ce qu'il faut bien connaître l'unité principale des nombres complexes que l'on additionne, et les diverses unités inférieures dans lesquelles on la subdivise, pour être capable de réduire successivement chaque somme partielle en unités de même espèce que celles de la colonne suivante à gauche.

EXEMPLE.

Sachant que :

287. 1 marc = 8 onces.
288. 1 once = 8 gros.
289. 1 gros = 3 deniers.
290. 1 den. = 24 grains.

On propose d'additionner les nombres suivans :

ADDITION.

54 marcs	7 onc.	7 gros	1 den.	21 grains.
36	5	7	1	22
8	7	6	2	21
7	5	5	1	14
108 marcs	3 onc.	3 gros	2 den.	6 grains.

1°. J'ai d'abord additionné les grains, dont la somme est 78 grains = 3 den. 6 grains (270), j'ai donc retenu 3 den., et n'ai écrit que les 6 grains sous les grains;

2°. Ayant additionné ces 3 den. avec ceux de la colonne des deniers, la somme est alors 8 deniers = 2 gros que j'ai retenus (289), plus 2 deniers que j'ai écrits sous les deniers;

3°. Ayant additionné ces deux gros avec ceux de la colonne des gros, la somme est alors 27 gros = 3 onces que j'ai retenues (288), plus 3 gros que j'ai écrits sous les gros;

4°. Ayant additionné ces 3 onces avec celles de la colonne suivante, la somme est alors 27 onces = 3 marcs que j'ai retenus (287), plus 3 onces que j'ai écrites sous les onces.

Enfin, j'ai additionné ces marcs avec ceux de la colonne des unités de marc, et ainsi de suite pour les dizaines, etc., selon la règle prescrite pour les nombres entiers (50).

De la soustraction des nombres fractionnaires ou complexes.

291. Pour soustraire un nombre fractionnaire d'un autre:

1°. *Retranchez d'abord la fraction du nombre à soustraire de celle de l'autre nombre* (252);

2°. *Après quoi retranchez le chiffre des unités du nombre à soustraire de celui des unités de l'autre nombre, et ainsi de suite.* Comme (54).

Lorsque la fraction à soustraire est plus grande que celle dont il s'agit de la soustraire, empruntez alors une unité sur

les entiers du nombre sur lequel vous opérez la soustraction, réduisez cette unité en fraction d'un même dénominateur que celles qu'il s'agit de soustraire l'une de l'autre ; ajoutez son numérateur au numérateur de celles de ces deux fractions dont l'autre doit être soustraite, et opérez la soustraction des fractions (252).

Après cela, passez à la soustraction des entiers, et, pour tenir compte de l'unité que vous avez empruntée dans l'opération précédente, ajoutez-la au nombre à soustraire, etc. Comme (54).

Soustraction des nombres fractionnaires.

292. Si de 5 $\frac{2}{3}$, par exemple, on propose de soustraire 2 $\frac{3}{4}$, après avoir réduit d'abord les deux fractions au même dénominateur, lesquels sont $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$, ne pouvant soustraire $\frac{9}{12}$ de $\frac{8}{12}$, j'emprunte sur le nombre 5 une unité, laquelle réduite en douzièmes vaut $\frac{12}{12}$, et ajoutée à $\frac{8}{12}$ fait $\frac{20}{12}$, desquels je soustrais $\frac{9}{12}$, le reste est $\frac{11}{12}$. Pour tenir compte de l'unité empruntée sur 5, je l'ajoute au nombre entier 2, ce qui fait 3 à soustraire de 5, le reste des entiers sera 2 ; donc le reste total est 2 $\frac{11}{12}$.

Soustraction des nombres complexes.

293. Pour soustraire un nombre complexe d'un autre de même espèce, il faut les écrire l'un au-dessous de l'autre, et soustraire les unités de chaque ordre inférieur des unités du même ordre du nombre supérieur, selon la règle établie (57); si la soustraction de l'un des chiffres proposés ne peut avoir lieu, il faut emprunter une unité sur le chiffre suivant à gauche du nombre supérieur, qui en vaudra une certaine quantité de celles représentées par le chiffre précédent à droite ; il faut les ajouter à ce dernier, et soustraire ensuite de leur somme les unités du même ordre du nombre inférieur, sous lesquelles il faut écrire le reste de l'opération ; puis il faut ajouter l'unité empruntée au chiffre suivant à gauche du

nombre inférieur, qu'il faut soustraire à son tour du chiffre correspondant du nombre supérieur, et ainsi de suite.

EXEMPLE.

Supposons, par exemple, qu'en Hollande, où le marc vaut 8 onces, l'once 8 gros, le gros 3 deniers, et le denier 24 grains, on ait prêté 54 marcs 7 onces 5 gros 1 denier et 12 grains pesant d'argent, à un orfèvre, qui a rendu 39 mar. 7 onces 7 gros 2 deniers et 18 grains, et qu'on demande combien l'orfèvre en doit encore au prêteur, il est évident qu'il faut soustraire la quantité rendue de la quantité prêtée, pour connaître la quantité qui revient encore au prêteur.

OPÉRATION.

	54 mar.	7 onc.	5 gros	1 den.	12 grains.
Nomb. à soustr.	39	7	7	2	18
	14	7	5	1	18
Preuve.	54 mar.	7 onc.	5 gros	1 den.	12 grains,

ou somme composée de l'addition du nombre à soustraire avec le reste.

OPÉRATION.

18 Grains ne pouvant être soustraits de 12 grains du nombre supérieur, j'ai emprunté, sur le chiffre suivant à gauche, 1 denier qui vaut 24 grains, et j'ai dit : 24 grains + 12 grains = 36 grains, et 36 grains — 18 grains = 18 gr., j'ai donc écrit le reste 18 grains sous les grains du nombre inférieur;

Passant ensuite à la soustraction des deniers, j'ai dit : 2 d. à soustraire, plus 1 emprunté dans l'opération précédente, font 3 deniers à soustraire, mais qui ne peuvent être soustraits du denier du nombre supérieur; alors j'ai emprunté, sur le chiffre suivant à gauche, 1 gros qui vaut 3 den., et j'ai dit : 3 den. + 1 den. = 4 den., et 4 den. — 3 den. = 1 den.;

j'ai donc écrit ce reste de 1 denier sous les deniers du nombre à soustraire ;

Puis, passant à la soustraction des gros, j'ai dit : 7 gros à soustraire, plus 1 emprunté dans l'opération précédente, font 8 gros qui ne peuvent être soustraits des 7 gros du nombre supérieur ; mais empruntant sur le chiffre suivant 1 once qui vaut 8 gros, j'ai ces 8 gros, + 7 gros = 15 gros, et 15 gros — 8 gros = 7 gros ; j'ai donc écrit le reste 7 gros sous les gros du nombre soustrait ;

Puis, passant à la soustraction des onces, j'ai dit : 7 onces à soustraire et 1 once empruntée font 8 onces, qui ne peuvent être soustraites des 7 onces du nombre supérieur ; mais, empruntant 1 marc = 8 onces sur le chiffre suivant à gauche, j'ai ces 8 onces + 7 onces = 15 onces, et 15 onces — 8 onces = 7 onces, j'ai donc écrit le reste 7 onces sous celles dont j'ai opéré la soustraction ; et ainsi de suite pour les entiers.

Ces exemples peuvent suffire. Les personnes qui désireront s'exercer peuvent s'en proposer autant qu'elles voudront, où l'unité principale sera subdivisée d'une manière quelconque.

Lorsqu'elles connaîtront bien les subdivisions de l'unité principale qu'elles proposeront pour exemple, cette connaissance leur suffira pour opérer sans la moindre difficulté.

De la multiplication des nombres fractionnaires ou complexes par les parties aliquotes.

294. Cette opération présente deux cas que nous allons examiner chacun en particulier pour plus de clarté.

Le premier est celui où le multiplicande est un nombre fractionnaire ou complexe, et le multiplicateur un nombre entier.

Le second est celui où les deux facteurs sont des nombres fractionnaires ou complexes.

De la multiplication d'un nombre fractionnaire ou complexe par un nombre entier.

295. Elle se réduit à la règle suivante :

1°. *Multipliez les entiers du multiplicande par les entiers du multiplicateur ;*

2°. *La fraction du multiplicande par les entiers du multiplicateur, ou ce qui est plus court et revient au même* (66),

Les entiers du multiplicateur par la fraction du multiplicande, décomposée en parties aliquotes de son unité.

Par ce moyen, vous aurez pris le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités.

La somme des produits partiels sera le produit, et aura la même unité que le multiplicande (64).

EXEMPLE.

De la multiplication d'un nombre fractionnaire par un nombre entier.

Soit proposé de multiplier 125 $\frac{15}{16}$ par 32.

OPÉRATION.

	125 $\frac{15}{16}$	
	32	
	250	
	375.	
Par $\frac{8}{16}$	16	(1°.)
Par $\frac{4}{16}$	8	(2°.)
Par $\frac{2}{16}$	4	(3°.)
Par $\frac{1}{16}$	2	(4°.)
	4030	

J'ai d'abord multiplié les entiers de deux facteurs, c'est-à-dire, 125 par 32.

Ensuite, pour multiplier $\frac{15}{16}$ par 32, j'ai multiplié 32 par

$\frac{15}{16}$, ce qui revient au même (66); et j'ai opéré de la manière suivante :

Sachant qu'on peut décomposer ou réduire $\frac{15}{16}$ en $\frac{8}{16}+\frac{4}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$, qui sont des parties aliquotes de l'unité et des parties aliquotes les unes des autres.

1°. Pour avoir le produit de 32 par $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$, j'ai pris la moitié de 32, qui est 16 (260) ;

2°. Pour avoir le produit de $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$, j'ai pris la $\frac{1}{2}$ de la $\frac{1}{2}$ précédente, c'est-à-dire, de 16, parce qu'un $\frac{1}{4}$ n'est autre autre chose que la $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$, ce qui m'a donné 8 pour le produit de $\frac{1}{4}$;

3°. Pour avoir le produit de $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$, j'ai pris la $\frac{1}{2}$ de 8, produit de $\frac{1}{4}$, ce qui m'a donné 4 pour le produit de $\frac{1}{8}$, lequel ne doit être autre chose que la moitié de celui de $\frac{1}{4}$;

4°. Enfin, pour avoir le produit de $\frac{1}{16}$, moitié de $\frac{1}{8}$, j'ai pris la moitié de 4, produit de $\frac{1}{8}$.

La somme 4030 des produits partiels est le *produit*.

296. Observez que, pour prendre sur 32 les $\frac{15}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$, après avoir pris la $\frac{1}{2}$ de 32, j'ai pris pour $\frac{1}{4}$ la $\frac{1}{2}$ du produit de $\frac{1}{2}$, pour $\frac{1}{8}$ la $\frac{1}{2}$ du produit de $\frac{1}{4}$; et enfin pour $\frac{1}{16}$ la $\frac{1}{2}$ du produit de $\frac{1}{8}$, parce que $\frac{1}{4}$ est la $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$, que $\frac{1}{8}$ est la $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$, et que $\frac{1}{16}$ est la $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{8}$. Conséquemment :

297. Lorsque certaines des parties, dans lesquelles on a décomposé la fraction du multiplicande, sont à la fois parties aliquotes de l'unité, et parties aliquotes les unes des autres, on peut indifféremment les prendre sur le produit de celles dont elles sont des parties exactes, ou sur le nombre entier que l'on multiplie.

De la multiplication d'un nombre complexe par un nombre entier.

Un nombre complexe n'est autre chose qu'un nombre fractionnaire, dans lequel les subdivisions de l'unité principale sont des fractions (234). Ainsi :

298. Dans un nombre complexe, on peut considérer les

entiers comme un nombre abstrait (235), et les subdivisions de l'unité principale comme des fractions.

Par ce moyen, la multiplication d'un nombre semblable ne diffère en aucun point de celle d'un nombre fractionnaire par un nombre entier ; et, pour l'opérer sans difficulté, il suffit :

1°. De connaître l'espèce de l'unité du multiplicande, afin de donner à chaque produit partiel l'unité du multiplicande (64) ;

2°. De connaître les parties dans lesquelles on subdivise cette unité, ainsi que ses différentes parties aliquotes, afin de prendre le produit de ces dernières sur celui de l'unité principale, ou le produit des unes sur celui des autres (297).

EXEMPLE.

299. Sachant 1°. que 1 liv. est prise pour unité ;
2°. que 1 liv. = 20 sous ;
3°. que 1 sou = 12 deniers.

On voit quelles sont les parties aliquotes de 1 l. = 20 s. ; les voici :

10 sous qui sont la $\frac{1}{2}$ de 1 liv.
5 sous qui en sont le $\frac{1}{4}$.
4 sous qui en sont le $\frac{1}{5}$.
2 sous qui en sont le $\frac{1}{10}$.
1 sou qui en est le $\frac{1}{20}$.

On voit aussi quelles sont les parties de 1 sou = 12 den. Les voici :

6 den. qui sont la $\frac{1}{2}$ de 1 sou.
4 den. qui en sont le $\frac{1}{3}$.
3 den. qui en sont le $\frac{1}{4}$.
2 den. qui en sont le $\frac{1}{6}$.
1 den. qui en est le $\frac{1}{12}$.

On voit aussi quelles sont les parties aliquotes de 2 sous = 24 den. Les voici :

1 sou en est la $\frac{1}{2}$.
8 den. en sont le $\frac{1}{3}$.
6 den. en sont le $\frac{1}{4}$.
4 den. en sont le $\frac{1}{6}$.
3 den. en sont le $\frac{1}{8}$.
2 den. en sont le $\frac{1}{12}$.
1 den. en est le $\frac{1}{24}$.

Cela posé : soit proposé de multiplier 51 liv. 19 s. 11 den. par 157.

OPÉRATION.

				157			
				51^l	19^s	11^d	
				157			
				785.			
Produit partiel.	1°. de	10 s.		78	10		(*a*)
	2°. de	5		39	5		
	3°. de	2		15	14		
	4°. de	1		7	17		
	5°. de	1		7	17		
	6°. de	»	6 d.	3	18	6	
	7°. de	»	3	1	19	3	
	8°. de	»	1	0	13	1	
	9°. de	»	1	0	13	1	
		Produit		8163^l	6^s	11^d	

D'abord, pour avoir le produit des entiers des deux facteurs, j'ai multiplié 51 liv. par 157, ou, ce qui revient au même (295), 157 par 51.

(*a*) Cette indication 1°., 2°., 3°., etc., placée au-devant de chaque produit partiel comme au-devant de l'explication qui lui est relative, a pour objet de renvoyer du produit à l'explication.

Ensuite, pour multiplier 19 s. 11 d. par 157, j'ai multiplié 157 par 19 s. 11 d., ce qui revient au même (66), et j'ai opéré de la manière suivante :

Sachant que 19 s., décomposés en 10 s. + 5 s. + 2 s. + 1 s. + 1 s. = $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}$ de 1 liv. (299), et que 11 deniers, décomposés en 6 d. + 3 d. + 1 d. + 1 d. = $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$ de 1 sou (299), et que ces diverses fractions sont à la fois parties aliquotes de 1 liv., et parties aliquotes les unes des autres.

300. 1°. Pour avoir le produit de 157 par 10 s. = $\frac{1}{2}$ de 1 l.; j'observe que le produit de l'unité du multiplicande, c'est-à-dire, de 1 liv. par 157, ou, ce qui revient au même (66), de 157 par 1 est 157 liv., nombre qui est précisément égal au multiplicateur 157; qu'ainsi le produit de 10 s. doit être la $\frac{1}{2}$ de 157 liv.; je prends alors la moitié du multiplicateur 157, en disant : la moitié de 15 est 7 que j'écris au rang des dizaines, plus 1 dizaine de reste, qui, avec les 7 l. du chiffre suivant, font 17, dont la moitié est 8 liv., plus un reste de 1 l. = 20 sous, dont la moitié est 10 sous, que j'écris au rang des sous, ce qui m'a donné en total 78 liv. 10 sous pour le produit de la $\frac{1}{2}$ de l'unité du multiplicande, ou de 10 sous;

2°. Pour avoir le produit de 5 s. = $\frac{1}{4}$ de 1 liv., j'ai pris la $\frac{1}{2}$ de la $\frac{1}{2}$ ci-dessus, c'est-à-dire, de 78 liv. 10 s., produit de 10 s., ce qui m'a donné 39 l. 5 s. pour le produit de 5 sous;

301. 3°. Pour avoir le produit de 2 s. = $\frac{1}{10}$ de 1 liv., j'ai pris le dixième du produit de 1 liv., c'est-à-dire, de 157 l., ou du multiplicateur 157 (300). Or, pour avoir le dixième de 157 l., il suffit d'en retrancher le dernier chiffre à droite par une virgule (44), ce qui donne 15 liv., 7 = 15 l. 14 s, pour le dixième de 157 liv., c'est-à-dire, pour le produit de 2 sous.

Et observons, avant de passer outre, que, comme le dixième de 1 liv. est 2 sous ou vaut 2 sous, il suffit de multiplier les dixièmes par 2 sous pour les réduire en sous. Donc, en général :

302. Pour avoir le produit de 2 sous, ou le dixième d'un nombre quelconque de livres, il ne faut que retrancher, par une virgule, le dernier chiffre de ce nombre ou des entiers du multiplicateur, considéré comme ayant 1 liv. pour unité. La partie à gauche de la virgule exprimera des livres dont le chiffre à droite exprimera des dixièmes, qu'on réduira en sous en multipliant ce chiffre par 2.

303. 4°. Pour avoir le produit de 1 s., j'ai pris la moitié du produit de 2 sous, c'est-à-dire, de 15 l. 14 s., en disant: la moitié de 15 l. est 7 l., que j'écris au rang des livres; le reste de cette opération est 1 liv., qui vaut 20 sous, lesquels, ajoutés aux 14 sous qui accompagnent les 15 liv., font 34 s., dont la moitié est 17, que j'écris sous la colonne des sous, ce qui me donne en total 7 l. 17 s. pour le produit de 1 sou;

5°. J'ai écrit 7 l. 17 s. au-dessous du produit précédent, pour avoir encore une fois le produit d'un sou;

6°. Pour avoir le produit de 6 d. = ½ sou, j'ai pris la moitié de 7 l. 17 s., produit de 1 sous, en disant: la moitié de 7 l. est 3 l. que j'écris au rang des livres, plus un reste d'une livre qui vaut 20 sous, lesquels, ajoutés au 17 sous qui accompagnent 7 l., font 37 s., dont la moitié est 18 s. que j'écris dans la colonne des sous; plus un reste de 1 sou qui vaut 12 d., dont la moitié est 6 d. que j'écris à la droite des sous, ce qui me donne en total 3 l. 18 s. 6 d. pour le produit de 6 den.;

7°. Pour avoir le produit de 3 den., j'ai pris la moitié de celui de 6 d., de 3 l. 18 s. 6 d., ce qui m'a donné 1 l. 19 s. 3 d. pour le produit de 3 den.;

8°. Pour avoir le produit de 1 den., j'ai pris le tiers de celui de 3 den., c'est-à-dire, de 1 l. 19 s. 3 d., ce qui m'a donné 13 s. 1 d. pour le produit d'un denier;

9°. J'ai écrit 13 s. 1 d. au-dessous d'un produit précédent, pour avoir encore une fois le produit d'un denier.

Le produit 8163 l. 6 s. 11 den. est la somme des produits partiels.

304. Observons encore, avant de passer outre, qu'en général, dans le cours de l'opération d'une multiplication complexe,

Lorsqu'il s'agit de prendre la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$ ou le $\frac{1}{4}$, etc., d'une quantité complexe, ce qui est la même chose que la diviser par 2, par 3 ou par 4, etc. (117), il faut diviser : 1°. les entiers ; 2°. les parties qui les suivent immédiatement ; 3°. celles qui suivent immédiatement les précédentes, et ainsi de suite jusqu'aux dernières ; 4°. enfin la fraction des parties du plus petit ordre, si elles sont suivies d'une fraction, en observant d'écrire chaque résultat au rang qui appartient aux parties qui le composent.

Et lorsque ces divisions ne peuvent être faites exactement, en observant de réduire : 1°. le *reste* des entiers, en parties de même dénomination que celles qui suivent immédiatement les entiers ; d'ajouter ces dernières au résultat de cette réduction, et de diviser ensuite le total ; 2°. le *reste* des parties de cette premiere dénomination, en partie de même dénomination que celles qui les suivent immédiatement ; d'ajouter ces dernières au résultat de cette seconde réduction ; de diviser ensuite le total, et ainsi de suite pour la réduction de chaque reste en partie d'une troisième, d'une quatrième dénomination, etc., jusqu'à celles de la dernière ou du dernier ordre, qu'il faut réduire elles-mêmes en fraction d'un même dénominateur, que celle qui les accompagne, comme (192), et on divise ensuite le résultat de cette derniere réduction.

EXEMPLE.

305. Soit proposé de multiplier 1 l. 18 s. 9 d. par 157.

OPÉRATION.

			157	9	
			1 l.	18 s.	9 d. (*a*)
Produit partiel.	1°. de 1 l.		157	»	»
	2°. de » 18 s.		141	6	
	3°. de » » 6 d.		3	18	6
	4°. de » » 3		1	19	3
		Produit	304	3	9

306. 1°. Pour avoir le produit des entiers, j'ai multiplié 1 liv. par 157, ce qui m'a donné 157 liv. (64), pour le produit de 1 liv. ou de l'unité du multiplicande;

307. 2°. Pour avoir celui des 18 sous du multiplicande, ou de 9 fois 2 sous, j'observe que le produit de 2 sous serait 15 l., 7 (302); qu'ainsi on peut avoir celui de 18 sous ou de 9 fois 2 sous, en multipliant le produit de 2 s. par 9, c'est-à-dire, 15 l., 7 par 9.

J'ai donc multiplié 15 l., 7 par 9, en disant: 9 fois 7 font 63 dixièmes; j'ai doublé les 3 dixièmes pour les réduire en sous, ce qui m'a donné 6 s. (301), que j'ai écrits au rang des sous, et j'ai retenu 6 l., parce que 60 dixièmes de livres valent 6 liv.; puis j'ai continué la multiplication, en disant: 9 fois 5 font 45 l., et 6 retenus de l'opération précédente font 51 liv., j'ai écrit 1 liv. au rang des livres, et j'ai retenu 5 dizaines; enfin j'ai terminé la multiplication, en disant: 9 fois 1 font 9, et 5 que j'ai retenus font 14, que j'ai écrits à la gauche des résultats précédens; ce qui m'a donné 141 l. 6 s. pour le produit de 18 s.

308. 3°. Sachant que 9 d. = 6 d. + 3 d., j'observe que 6 den. sont le quart de 2 s. = 24 d.; qu'ainsi, pour avoir le

(*a*) Le chiffre 9, placé au-dessus de 18 sous, signifie que 18 sous contiennent 9 fois 2 sous, et qu'il faut multiplier le produit de 2 sous par 9 pour avoir celui de 18 sous.

produit de 6 den., il ne s'agit que de prendre le quart de celui de 2 sous, c'est-à-dire, de 15 l., 7 = 15 l. 14 s., j'ai donc pris le quart de 15 l., 7, en disant : le quart de 15 liv. est 3 liv., que j'écris au rang des livres; et, comme ces 3 l. sont le quart de 12 liv. et non de 15 liv., j'ai réduit en sous le reste 3 l.; or ces 3 liv. valent 60 sous, et les 7 dixièmes valent 14 sous, ce qui fait 74 sous dont j'ai pris le quart, qui est 18 s. 6 d.

Ce qui m'a donné en total 3 l. 18 s. 6 d. pour le produit de 6 den.

4°. Enfin, pour avoir le produit de 3 d., j'ai pris la moitié de celui de 6 den., c'est-à-dire, de 3 l. 18 s. 6 d., ce qui m'a donné 1 l. 19 s. 3 den. Il résulte de l'abréviation du n°. (302), qu'en général :

309. *Lorsqu'on veut avoir le produit de* 4 s., 6 s., 8 s, 10 s., 12 s., 14 s., 16 s. *ou* 18 s. *en une seule opération, il ne s'agit d'abord que de chercher combien le nombre de sous proposé contient de fois 2 sous, ce que l'on trouvera de suite en en prenant la moitié, et que de reconnaître ensuite quel est le produit de 2 sous, que l'on trouvera aussi promptement en retranchant, par une virgule, le premier chiffre à droite du nombre qui exprime les entiers du multiplicateur* (302); *et, après ces opérations préalables, il ne s'agira plus que de multiplier le produit de 2 s. par 2, par 3 ou par 4, etc., lorsque le nombre de sous proposé se sera trouvé contenir 2 fois, 3 fois ou 4 fois, etc., 2 sous* (307).

310. Prendre les 2 sous pour livre d'un nombre de livres quelconque, c'est en prendre le dixième, car 2 s. = $\frac{1}{10}$ de 1 liv. (301).

311. En prendre les 4 s., 6 s. ou 8 s. pour liv., etc., c'est en prendre le dixième autant de fois que le nombre de sous proposé se trouve contenir de fois 2 s. Ainsi, pour prendre les 4 s., 6 s. ou 8 s. pour livre, etc., d'un nombre de livres quelconque, prenez en d'abord le dixième, et multipliez ce dixième par 2, par 3 ou par 4, etc., en un mot, opérez

comme (309), ou par les parties aliquotes de 1 l. comme (299).

312. Pour prendre 1 sou pour livre, ou les 8 d., 6 d., 4 d., 3 d., 2 d., 1 d., pour livre d'un nombre quelconque de livres, observez que 1 s., 8 d., 6 d., 4 d., etc., sont des parties aliquotes de 2 s. ou de 1 s.; qu'ainsi, pour en avoir le produit, il faut le prendre sur celui de 2 sous, comme (308), ou sur celui de 1 s., comme (303).

De la multiplication de deux nombres fractionnaires ou complexes.

313. Lorsque le multiplicande est un nombre fractionnaire ou complexe de même que le multiplicateur;

Après avoir multiplié les entiers et la fraction du multiplicande, par les entiers seulement du multiplicateur, comme (295).

Pour multiplier ensuite le multiplicande par la fraction du multiplicateur,

Prenez, sur tout ce qui compose le multiplicande, les parties marquées par la fraction du multiplicateur, décomposée en parties aliquotes de son unité.

Multiplication de deux nombres fractionnaires.

EXEMPLE.

Soit proposé de multiplier $14 \frac{2}{3}$ par $9 \frac{3}{4}$.

OPÉRATION.

		14. $\frac{2}{3}$
		9. $\frac{3}{4}$
Produit	1°. des entiers	126.
	2°. de $\frac{2}{3}$	6
	3°. de $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	7. $\frac{1}{3}$
	4°. de $\frac{1}{4}$	3. $\frac{2}{3}$
	Produit	143 »

314. 1°. J'ai multiplié les entiers des deux facteurs;

2°. Pour avoir le produit de $\frac{2}{3}$ par les entiers seulement du multiplicateur, c'est-à-dire, par 9, j'ai pris les deux tiers de 9, ce qui m'a donné 6 pour le produit de $\frac{2}{3}$ (295).

Par ce moyen, j'ai eu le produit des entiers et de la fraction du multiplicande par les entiers seulement du multiplicateur, comme (295); ou, en d'autres termes, j'ai pris autant de fois le multiplicande qu'il y a d'unités au multiplicateur.

315. Ensuite, pour avoir le produit des entiers et de la fraction du multiplicande, par la fraction du multiplicateur décomposée en parties aliquotes de l'unité, c'est-à-dire, pour avoir le produit de $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, j'ai opéré comme suit :

3°. Pour $\frac{1}{2}$ j'ai pris la $\frac{1}{2}$ de $14\frac{2}{3}$, ce qui m'a donné $7\frac{1}{3}$ pour le produit de la $\frac{1}{2}$ de l'unité du multiplicateur. En effet, puisqu'il s'agit de prendre $14\frac{2}{3}$ autant de fois que l'unité est contenue dans le multiplicateur, il est évident qu'en ajoutant à celui-ci 1 ou l'unité, le produit de cette unité serait égal au multiplicande $14\frac{2}{3}$, car $14\frac{2}{3} \times 1 = 14\frac{2}{3}$. Donc, pour avoir le produit de la $\frac{1}{2}$ de l'unité du multiplicateur, il faut prendre la $\frac{1}{2}$ de tout ce qui compose le multiplicande.

4°. Pour avoir le produit de $\frac{1}{4}$, j'ai pris la $\frac{1}{2}$ du produit de $\frac{1}{2}$, ce qui m'a donné $3\frac{2}{3}$ pour le produit de $\frac{1}{4}$.

La somme 143 des produits partiels est le *produit*.

316. Remarquons, avant de passer outre, que, pour opérer la multiplication de deux nombres fractionnaires ou complexes, il faut : 1°. multiplier les entiers ; 2°. la fraction du multiplicande par les entiers seulement du multiplicateur (295); 3°. prendre, sur tout ce qui compose le multiplicande, les parties marquées par la fraction du multiplicateur. Qu'ainsi :

317. La multiplication de deux nombres fractionnaires ou complexes se réduit à la règle suivante :

1°. Multipliez les entiers du multiplicande par les entiers du multiplicateur ;

2°. *Prenez, sur les entiers seulement du multiplicateur,*

les parties marquées par la fraction du multiplicande (205) *et* (314);

3°. *Prenez, sur tout ce qui compose le multiplicande, les parties marquées par la fraction du multiplicateur* (313) *et* (315).

En observant de décomposer la fraction du multiplicande, ainsi que celle du multiplicateur, chacune en parties aliquotes de son unité,

La somme des produits partiels sera le produit qui aura la même unité que le multiplicande (64).

Multiplication de deux nombres complexes.

318. Elle ne diffère en aucun point de celle de deux nombres fractionnaires (313), et on peut l'opérer sans aucune difficulté sur les mêmes principes, lorsqu'on connaît : 1°. la nature de l'unité du multiplicande et de l'unité du multiplicateur; 2°. les parties dans lesquelles on les subdivise chacune, et leurs parties aliquotes.

EXEMPLE.

Sachant 1°. que 1 marc = 8 onces.
2°. que 1 once = 8 gros.
3°. que 1 gros = 3 deniers.
4°. que 1 den. = 24 grains.

Sachant enfin que le marc d'argent est au prix de 51 liv. 19 s. 11 den., on demande combien coûteront 157 marcs 7 onces 7 gros 2 den. 21 grains d'argent à ce même prix. On voit qu'on résoudra ce problème en multipliant 51 liv. 19 s. 11 d. par 157 marcs 7 onces 7 gros 2 den. 21 grains qui est ici le multiplicateur, et qui a pour unité 1 marc, dont l'once, le gros, le denier et le grain sont des fractions ou subdivisions.

OPÉRATION.

Multiplicateur		157 m. 7 o. 7 g. 2 d. 21 grains.					
Multiplicande		51 l. 19 s. 11 d.					
Prix de 157 marcs à	1 l. le marc.	157 l.					
	50 l.	785					
	10 s.	78	10 s.				
	5 s.	39	5				
	2 s.	15	14				
	1 s.	7	17				
	1 s.	7	17				
	6 d.	3	18	6 d.			
	3 d.	1	19	3			
	1 d.	»	13	1			
	1 d.	»	13	1		1536	D. C.
A 51 l. 19 s. 11 d. le marc. Prix de	4 onces. . .	25	19	11	$\frac{1}{2}$	768	
	2 onces. . .	12	19	11	$\frac{3}{4}$	1152	384
	1 once . . .	6	9	11	$\frac{7}{8}$	1344	192
	4 gros. . . .	3	4	11	$\frac{15}{16}$	1440	96
	2 gros. . . .	1	12	5	$\frac{31}{32}$	1488	48
	1 gros. . . .	.	16	2	$\frac{63}{64}$	1512	24
	1 denier. . .	.	5	4	$\frac{191}{192}$	1528	8
	1 denier. . .	.	5	4	$\frac{191}{192}$	1528	8
	12 grains. . .	.	2	8	$\frac{191}{384}$	764	4
	6 grains. . .	.	1	4	$\frac{191}{768}$	382	2
	3 grains. . .	.	.	8	$\frac{191}{1536}$	191	1
	Produit	8215 l.	6 s.	1 d.	$\frac{1345}{1536}$	12097	
						1345	1536
							7

D'abord je multiplie les entiers du multiplicande par ceux du multiplicateur (295).

Or, pour multiplier 19 s. 11 d. par les entiers seulement du multiplicateur, c'est-a-dire, par 157, on multipliera 157 par 19 s. 11 d., comme (299 et suivans).

Pour multiplier ensuite le multiplicande par 7 onc. 7 gros 2 den. 21 grains, on les décomposera ainsi : 4 onc. + 2 onc. + 1 onc. + 4 gros + 2 gros + 1 gros + 1 den. + 1 den. + 12 grains + 6 grains + 3 grains = 7 onc. 7 gros 2 den. 21 grains, etc.

1°. Pour 4 onces, qui sont la moitié d'un marc ou de l'unité du mnltiplicateur, on prendra la moitié du prix du marc, c'est-à-dire, la moitié de 51 l. 19 s. 11 d. (313), qui sera 25 l. 19 s. 11 d. $\frac{1}{2}$;

2°. Pour 2 onces on prendra la moitié du prix de 4 onces, c'est-à-dire, de 25 l. 19 s. 11 den. $\frac{1}{2}$, qui sera 12 l. 19 s. 11 den. $\frac{3}{4}$;

3°. Pour 1 once, on prendra la moitié du prix de 2 onces, laquelle moitié sera 6 l. 9 s. 11 d. $\frac{7}{8}$;

4°. Pour 4 gros, on prendra la moitié du prix de l'once, c'est-à-dire, la moitié de 6 l. 9 s. 11 d. $\frac{7}{8}$, qui sera 3 l. 4 s. 11 den. $\frac{15}{16}$;

5°. Pour 2 gros, on prendra la moitié du prix de 4 gros, c'est-à-dire, la moitié de 3 l. 4 s. 11 d. $\frac{15}{16}$, qui sera 1 liv. 12 s. 5 d. $\frac{31}{32}$;

6°. Pour 1 gros, on prendra la moitié de 1 l. 12 s. 5 d. $\frac{31}{32}$, qui sera 16 s. 2 d. $\frac{63}{64}$;

7°. Pour 1 denier, on prendra le tiers de 16 s. 2 d. $\frac{63}{64}$, c'est-à-dire, le tiers du prix d'un gros, qui sera 5 s. 4 d. $\frac{191}{192}$;

8°. Pour l'autre denier, on aura encore 5 s. 4. d. $\frac{191}{192}$;

9°. Pour 12 grains, on prendra la moitié du prix de 1 d., c'est-à-dire, la moitié de 5 s. 4 den. $\frac{191}{192}$, qui sera 2 sous 8. den. $\frac{191}{384}$;

10°. Pour 6 grains, on prendra la moitié du prix de 12 gr., laquelle moitié sera 1 s. 4 d. $\frac{191}{768}$;

11°. Enfin, pour 3 grains, on prendra la moitié du prix de 6 grains, laquelle moitié sera 8 d. $\frac{191}{1536}$. On fera ensuite l'addition de ces divers produits, et on aura 8215 liv. 6 sous 1 den. $\frac{1345}{1536}$.

A l'égard des restes accompagnés de fractions, que l'on

a lorsqu'on prend de certaines parties d'un nombre complexe, on observera la règle établie (304).

On opérera la réduction des fractions au même dénominateur, en observant les abréviations indiquées (227), et on fera l'addition comme (251), etc.

319. *Preuve de l'opération précédente.*

		315 m. 7 o.	7 g.	2 d. 18 g.			
		25	19	11	$\frac{1}{2}$		
		1575					
		6300					
Pour	18 s. . . .	283	10				
	1 s. . . .	15	15				
	6 den. . .	7	17	6			
	3 d. . . .	3	18	9			
	2 d. . . .	2	12	6		1536	
	$\frac{1}{2}$ d. . . .	0	13	1	$\frac{2}{4}$	768	
	4 onces .	12	19	11	$\frac{3}{4}$	1152	384
	2 onces .	6	9	11	$\frac{7}{8}$	1344	192
	1 once. .	3	4	11	$\frac{15}{16}$	1440	96
	4 gros . .	1	12	5	$\frac{31}{32}$	1488	48
	2 gros . .	.	16	2	$\frac{63}{64}$	1512	24
	1 gros . .	.	8	1	$\frac{63}{128}$	756	12
	1 denier .	.	2	8	$\frac{191}{384}$	764	4
	1 denier .	.	2	8	$\frac{191}{384}$	764	4
	12 grains .	.	1	4	$\frac{191}{768}$	382	2
	6 grains .	.	.	8	$\frac{191}{1536}$	191	1
		8215	6	1	$\frac{1545}{1536}$	10561	1536
						1345	6

EXEMPLE.

320. On a acheté 11 liv. 11 s. 11 d. $\frac{11}{12}$ de gros, argent de Hollande, à raison de 11 liv. 11 s. 11 den. $\frac{11}{12}$ argent de

France, pour une livre de gros; la livre de gros étant subdivisée en 20 sous de gros, et le sou de gros en 12 deniers de gros, on demande combien les 11 liv. 11 s. 11 den. $\frac{11}{12}$, argent de Hollande, coûteront de livres tournois.

On résoudra ce problème en multipliant 11 l. 11 s. 11 d. $\frac{11}{12}$ argent de France, qui est ici le multiplicande, par 11 l. 11 s. 11 den. $\frac{11}{12}$ de gros, qui est ici le multiplicateur.

OPÉRATION.

		l.	s.	d.			
	Multiplicande	11 l.	11 s.	11 d.	$\frac{11}{12}$.		
	Multiplicateur	11 l.	11 s.	11 d.	$\frac{11}{12}$.		
		121 .					
Produit partiel.	1°. de 10 s. . .	5 .	10 .				
	2°. de 1 s. . .	.	11 .				
	3°. de 6 d. . .	.	5 .	6.			
	4°. de 3 d. . .	.	2 .	9.			
	5°. de 1 d. . .	.	.	11.			
	6°. de 1 d. . .	.	.	11.		34560	D. C.
	7°. de $\frac{6}{12}$ de d.	.	.	5.	$\frac{1}{2}$	17280	»
	8°. de $\frac{3}{12}$ . . .	.	.	2.	$\frac{3}{4}$	25920	8640
	9°. de $\frac{1}{12}$ . . .	.	.	.	$\frac{11}{12}$	31680	2880
	10°. de $\frac{1}{12}$ . . .	.	.	.	$\frac{11}{12}$	31680	2880
Produit partiel.	11°. de 10 s. . .	5 .	15 .	11.	$\frac{23}{24}$	33120	1440
	12°. de 1 s. . .	.	11 .	7.	$\frac{47}{240}$	6768	144
	13°. de 6 d. . .	.	5 .	9.	$\frac{287}{480}$	20664	72
	14°. de 3 d. . .	.	2 .	10.	$\frac{767}{960}$	27612	36
	15°. de 1 d. . .	.	.	11.	$\frac{1727}{2880}$	20724	12
	16°. de 1 d. . .	.	.	11.	$\frac{1727}{2880}$	20724	12
	17°. de $\frac{6}{12}$ . . .	.	.	5.	$\frac{4607}{5760}$	27642	6
	18°. de $\frac{3}{12}$ . . .	.	.	2.	$\frac{10367}{11520}$	31101	3
	19°. de $\frac{1}{12}$ . . .	.	.	.	$\frac{33407}{34560}$	33407	1
	20°. de $\frac{1}{12}$ . . .	.	.	.	$\frac{33407}{34560}$	33407	1
	Produit	134 .	11 .	.	$\frac{16129}{34560}$	361729	34560
						16129	
							10 d. $\frac{16129}{34560}$.

D'abord on a multiplié 11 l. par 11 liv., ce qui a donné 121 liv. pour le produit des entiers :

1°. On a pris ensuite pour les 10 s., qui sont la moitié de l'unité du multiplicande, la moitié de 11 liv. (299), laquelle moitié est 5 liv. 10 s.;

2°. Pour 1 s., le $\frac{1}{10}$ de 5 liv. 10 s., qui est 11 s., ce qui est prendre le dixième du produit de 10 s.;

3°. pour 6 d., la moitié du produit d'un sou ou la moitié de 11 s., qui est 5 s. 6 d.;

4°. Pour 3 den., la moitié du produit de 6 den. ou de 5 s. 6 den., qui est 2 s. 9 den.;

5°. pour 1 d., le tiers du produit de 3 d. ou de 2 s. 9 d., qui est 11 den.;

6°. Pour un den., encore le tiers du produit de 3 d., qui est encore 11 den.;

7°. Pour $\frac{6}{12}$ de den., la moitié du produit de 1 den., ou la moitié de 11 den., qui est 5 den. $\frac{1}{2}$;

8°. Pour $\frac{3}{12}$, la moitié du produit de $\frac{6}{12}$, c'est-à-dire, la moitié de 5 den. $\frac{1}{2}$, qui est 2 den. $\frac{3}{4}$;

9°. Pour $\frac{1}{12}$, le tiers du produit de $\frac{3}{12}$, c'est-à-dire, le $\frac{1}{3}$ de 2 d. $\frac{3}{4}$, qui est $\frac{11}{12}$;

10°. Pour le $\frac{1}{12}$, restant encore, le $\frac{1}{3}$ de 2 den. $\frac{3}{4}$, qui est encore $\frac{11}{12}$.....

Jusque-là, toutes les parties du multiplicande 11 l. 11 s. 11 d. $\frac{11}{12}$ tournois n'auront été multipliées que par 11 l. de gros, c'est-à-dire, que par les entiers seulement du multiplicateur.

321. Cela fait, il reste à multiplier le multiplicande par les 11 s. 11 d. $\frac{11}{12}$ du multiplicateur;

11°. Ainsi pour 10 s., qui sont la moitié de l'unité du multiplicateur, on prendra la moitié du multiplicande (313), qui sera 5 l. 15 s. 11 d. $\frac{23}{24}$;

12°. Pour 1 sou, on prendra la $\frac{1}{10}$e. partie du produit de 10 s., qui sera 11 s. 7 d. $\frac{47}{240}$;

13°. Pour 6 den., on prendra la moitié du produit de 1 s., qui sera 5 s. 9 d. $\frac{287}{480}$;

14°. Pour 3 den. la $\frac{1}{2}$ du produit de 6 d., qui sera 2 sous 10 d. $\frac{767}{960}$;

15°. Pour 1 den., on prendra le tiers du produit de 3 d.;

16°. Pour 1 denier encore, on prendra une autre fois ce même tiers, qui sera 11 d. $\frac{127}{2880}$;

17°. Pour $\frac{6}{12}$ de den., on prendra la moitié du produit de 1 denier;

18°. Pour $\frac{3}{12}$, on prendra la moitié du produit de $\frac{6}{12}$;

19°. Pour $\frac{1}{12}$, on prendra le tiers du produit de $\frac{3}{12}$;

20°. Et enfin, pour l'autre $\frac{1}{12}$, on prendra encore ce même tiers; en additionnant ces différens produits partiels, on aura pour produit total 134 l. 11 s. 0 d. $\frac{16129}{34560}$.

322. Lorsque le nombre d'entiers qu'on a pour multiplicateur n'est pas supérieur à 12, on peut abréger beaucoup l'opération en multipliant successivement toutes les parties du multiplicande par ce nombre, à commencer par les fractions, et en observant, à mesure qu'on trouve chaque produit, de le réduire en unités d'un ordre supérieur que l'on retient pour les ajouter au produit suivant. Par exemple, ayant à multiplier 11 l. 11 s. 11 d. $\frac{11}{12}$ par 11, on peut multiplier successivement toutes les parties du multiplicande par 11, à commencer par les $\frac{11}{12}$ en disant : $\frac{11}{12} \times 11 = \frac{121}{12} =$ 10 d. $\frac{1}{12}$, en écrivant en conséquence $\frac{1}{12}$ sous les fractions, et en retenant les 10 d. pour les ajouter au produit suivant, en disant ensuite : 11 d. $\times$ 11 $=$ 121 d., 121 d. $+$ 10 d. retenus $=$ 131 d. $=$ 10 s. 11 d., en écrivant en conséquence les 11 den. sous les deniers, et en retenant les 10 s. pour les ajouter au produit suivant; puis en disant : 11 s. $\times$ 11 s. $=$ 121 s., 121 s. $+$ 10 s. $=$ 131 s. $=$ 6 l. 11 s., en posant en conséquence les 11 s. sous les sols et en retenant 6 liv.; enfin en disant : 11 liv. $\times$ 11 liv. $=$ 121 liv., et 121 liv. $+$ 6 liv. retenues font 127 liv. que l'on écrit sous les livres; par ce moyen on trouvera que le produit de 11 liv.

11 s. 11 den. $\frac{11}{12}$ multipliés par 11 liv. est 127 liv 11 s. 11 den. $\frac{1}{12}$.

Quant aux 11 s. 11 den. $\frac{11}{12}$ qui accompagnent les 11 liv. du multiplicateur, on opérerait comme on l'a déjà indiqué (321).

323. Pour faire la preuve du 16e. exemple, il faut doubler l'un des facteurs et prendre la $\frac{1}{2}$ de l'autre; on aura par ce moyen deux nouveaux facteurs d'une multiplication, dont le produit sera le même que celui de la multiplication de ce 16e. exemple (*a*).

(*a*) La preuve la plus naturelle de la multiplication est la division. Mais il est bon que les commençans fassent les preuves par des multiplications identiques, pour s'exercer plus utilement par un plus grand nombre d'opérations de même nature.

OPÉRATION.

		l.	s.	d.			
	Multiplicateur.	23 l.	3 s.	11 d. $\frac{5}{6}$			
	Multiplicande.	5 l.	15 s.	11 d. $\frac{23}{24}$			
		115 .					
Pour	10 s. la $\frac{1}{2}$ de 23 l. (405). .	11 .	10 .				
	5 s. la $\frac{1}{2}$ du pr. de 10 s. .	5 .	15 .				
	10 d. le $\frac{1}{6}$ du pr. de 5 s. .	.	19 .	2.			
	1 d. le $\frac{1}{10}$ du pr. de 10 d.	.	1 .	11.		34560 D. C.	
	$\frac{12}{24}$ la $\frac{1}{2}$ du pr. de 1 d. . .	.	.	11.	$\frac{1}{2}$	17288	»
	$\frac{6}{24}$ la $\frac{1}{2}$ du pr. de $\frac{12}{24}$. . .	.	.	5.	$\frac{3}{4}$	25920	8640
	$\frac{3}{24}$ la $\frac{1}{2}$ du pr. de $\frac{6}{24}$ . . .	.	.	2.	$\frac{7}{8}$	30240	4320
	$\frac{1}{24}$ le $\frac{1}{3}$ du pr. de $\frac{3}{24}$ . . .	.	.	.	$\frac{23}{24}$	33120	1440
	$\frac{1}{24}$ *idem*...... *idem*. . . .	.	.	.	$\frac{23}{24}$	33120	1440
	2 s. le $\frac{1}{10}$ du multiplicande	.	11 .	7.	$\frac{47}{240}$	6768	144
	1 s. la $\frac{1}{2}$ du pr. de 2 s. . .	.	5 .	9.	$\frac{287}{480}$	20664	72
	6 d. la $\frac{1}{2}$ du pr. de 1 s. .	.	2 .	10.	$\frac{767}{960}$	27612	36
	3 d. la $\frac{1}{2}$ du pr. de 6 d. .	.	1 .	5.	$\frac{765}{1920}$	13806	18
	1 d. le $\frac{1}{3}$ du pr. de 3 d. .	.	.	5.	$\frac{4607}{5760}$	27642	6
	1 d. *idem*..... *idem*. . .	.	.	5.	$\frac{4607}{5760}$	27642	6
	$\frac{3}{6}$ la $\frac{1}{2}$ du pr. de 1 d. . .	.	.	2.	$\frac{10367}{11520}$	31101	3
	$\frac{1}{6}$ le $\frac{1}{3}$ du pr. de $\frac{3}{6}$	.	.	.	$\frac{33407}{34560}$	33407	1
	$\frac{1}{6}$ *idem*....... *idem*. . . .	.	.	.	$\frac{33407}{34560}$	33407	1
	Produit.	134 .	11 .	.	$\frac{16129}{34560}$	361729	
						16129	34550
							10

De la manière de ramener la division de deux nombres fractionnaires ou complexes à celle de deux nombres entiers.

324. *On peut ramener la division de deux nombres fractionnaires à celle de deux nombres entiers, en réduisant d'abord le diviseur et le dividende chacun en fractions d'un même dénominateur que celle dont il est accompagné* (192); *en*

supprimant ensuite le dénominateur de la fraction qu'on a pour diviseur, ainsi que celui de la fraction qu'on a pour dividende (256)*; puis en multipliant le dividende par le dénominateur qu'on a supprimé au diviseur, et ce dernier par le dénominateur qu'on a supprimé au dividende.*

On aura fait éprouver par ce moyen les mêmes changemens au diviseur et au dividende (142) qui seront devenus deux nombres entiers; et on opérera la division selon la règle établie pour les nombres entiers.

Exemple de la division de deux nombres fractionnaires.

Soit proposé de diviser 123 $\frac{3}{8}$ par 7 $\frac{5}{6}$?

Je vois d'abord que 123 $\frac{3}{8} = \frac{987}{8}$; et qu'en supprimant le dénominateur de $\frac{987}{8}$ je multiplie le dividende par 8, je vois aussi que le diviseur 7 $\frac{5}{6} = \frac{47}{6}$: et qu'en supprimant le dénominateur de $\frac{47}{6}$ je multiplie le diviseur par 6; je vois donc que le dividende est 987, mais qu'il a été multiplié par 8; que le diviseur est 47, mais qu'il a été multiplié par 6; qu'ainsi je dois multiplier le diviseur 47 par 8, et le dividende 987 par 6 (141); j'aurai donc 5922 pour dividende et 376 pour diviseur. Conséquemment j'aurai un diviseur qui aura été multiplié par 6, et ensuite par 8, c'est-à-dire, par 48, et un dividende qui aura également été multiplié par 8, et ensuite par 6, c'est-à-dire, par 48, d'où il suit que le quotient restera le même.

Ayant divisé 5922 par 376, on a trouvé au quotient quinze entiers et pour reste 292, qui étant mis en fraction (166) donne pour quotient la fraction $\frac{292}{376} = \frac{3}{4}$ en la réduisant à sa plus simple expression; quotient qui est égal à celui qu'on a trouvé par la méthode indiquée dans l'exemple précédent.

325. On peut aussi ramener la division de deux nombres complexes à celle de deux nombres entiers en les réduisant chacun en une fraction ordinaire (243), et en opé-

rant ensuite sur ces fractions comme on vient de l'indiquer (324).

De la division des nombres complexes en particulier.

326. On peut ramener la division de deux nombres complexes à celle de deux nombres entiers, par les mêmes moyens que ceux qui servent à y ramener celle de deux nombres fractionnaires (324).

Mais comme on peut abréger de beaucoup l'opération lorsque le dividende est composé d'unités de même espèce que celles que doit avoir le quotient, et que le diviseur est un nombre entier; et encore, lorsque le diviseur est un nombre complexe de même espèce que le dividende, on traitera séparément de ces deux cas.

Observons, avant de passer outre, qu'en général :

327. On opère toujours la division des nombres entiers sans aucun égard pour la nature des unités dont ils sont composés, c'est-à-dire, comme si l'espèce des unités dont ils sont composés n'étoit pas désignée; en un mot, comme s'il ne s'agissoit que de savoir combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Mais lorsque le quotient doit avoir des unités d'une espèce déterminée par l'état de la question, on donne aux unités du quotient le dénominateur qui leur appartient.

En effet, quelle que soit l'espèce des unités que doit avoir le quotient de deux nombres entiers, il exprime toujours combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende; on peut donc toujours opérer la division de deux nombres entiers comme s'il ne s'agissait que de savoir combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, sauf à donner ensuite aux unités du quotient la dénomination qui leur convient d'après l'état de la question : Cela posé :

328. L'examen de l'état de la question qui conduit à la division d'un nombre complexe, fera toujours connaître claire-

ment l'espèce des unités que doit avoir le quotient; et après avoir déterminé l'espèce des unités que doit avoir le quotient,

329. On peut considérer *le dividende comme un nombre composé d'unités de même espèce que celles que doit avoir le quotient.* En effet, quelle que soit l'espèce des unités du dividende, le diviseur y sera toujours contenu le même nombre de fois; d'où il suit que le quotient contiendra évidemment la même quantité de fois l'unité.

De la division, par un nombre entier, d'un nombre complexe de même espèce que le quotient.

330. Lorsque le quotient doit avoir des unités de même nature que le dividende, et lorsque le dividende seul est complexe, on opère la division des unités principales du dividende exactement comme celle des nombres entiers (114); on réduit ensuite le reste de cette division en unités du second ordre, auxquelles on ajoute celles de ce second ordre qui font partie du dividende, ce qui forme du tout un nouveau dividende composé d'unités du second ordre, que l'on divise par le diviseur par les moyens ordinaires, et dont le quotient, composé d'unités de ce second ordre doit être écrit à la droite de celui des unités principales. On réduit ensuite le reste de cette seconde division en unités du troisième ordre, auxquelles on ajoute celles de ce troisième ordre, qui font partie du dividende; on divise le tout par les moyens ordinaires, et on écrit le quotient à la droite des deux précédens ensuite on continue ainsi à réduire chaque reste en unités de l'ordre suivant; tant qu'il s'en trouve d'un ordre inférieur dans le dividende (239), et à diviser comme à l'ordinaire le dividende partiel qui compose chaque reste.

EXEMPLE.

On a donné 5368 liv. 14 s. 11 den. en payement de 157

aunes de drap : on demande à combien cela fait revenir l'aune.

L'aune ne coûtera évidemment que la cent cinquante-septième partie de 5368 livres 14 sous 11 deniers (*a*).

Pour en connaître le prix il faut donc diviser 5368 l. 14 s. 11 d. par 157, à commencer par les livres, et le quotient sera évidemment de même nature que le dividende dont il exprimera une partie (*b*).

OPÉRATION.

	5368 l. 14 s. 11 d.	157
	658	34 l. 3 s. 11 d.
Reste des liv. multiplié par 20 sous	30	
	20	
	614 s.	
Reste des sous multiplié par 12 den.	143	
	12	
	1727 d.	
	157	
	..0	

Les 5368 liv. divisés par 157, par les moyens ordinaires, donneront d'abord 34 liv. pour quotient, et pour reste 30 liv.; ensuite ces 30 liv. multipliées par 20 pour être réduites en sols donneront avec les 14 s. du dividende, 614 s., qui, divisés eux-mêmes par 157, donneront 3 s. ponr quotient, et pour reste 143 s.; enfin, ces 143 s. multipliés par 12 pour être réduits en deniers, donneront avec les 11 d. du divi-

(*a*) Cet exemple est la preuve de la multiplication du n°. (425).

(*b*) Prendre la 157e. partie d'un nombre, ou le diviser par 157, c'est la même chose; or 5368 liv. 14 s. 11 d., ayant pour l'unité 1 liv., il est évident que la 157e. partie de ce nombre complexe, aura aussi pour unité 1 liv.

dende, 1757 d., qui, étant divisés par 157, donneront exactement 11 d. pour quotient (*a*).

De la division d'un nombre complexe dont l'unité est différente de celle que doit avoir le quotient.

331. Il faut ramener cette division à celle de deux nombres entiers :

1°. *En réduisant d'abord le dividende en une fraction ordinaire* (243), *dont on supprime le dénominateur* (256), *ce qui convertit le dividende en un nombre entier; 2°. en multipliant le diviseur par le dénominateur supprimé au dividende* (142).

Ou, ce qui est la même chose en d'autres termes, *en réduisant le dividende en unités de la plus petite espèce de toutes celles qui le composent* (243), *et en faisant le même changement au diviseur.*

On aura par ce moyen deux nombres entiers pour diviseur et pour dividende, et on les divisera selon les règles ordinaires en traitant les unités du dividende comme si elles étaient de la même espèce que celles que doit avoir le quotient (329).

Par exemple, si on proposait cette question :

Combien pour 1434 liv. 13 s. 4 d. fera-t-on faire d'ouvrage, à raison de 48 liv. la toise? Il est clair, par la nature de la question, que le quotient doit être des toises et des parties de la toise.

On réduira donc 1334 liv. 13 s. 4 den. tout en deniers, ce ce qui donnera 320320 den. $=\frac{320320}{240}$ de la livre; on réduira également 48 liv. en den., et on aura $\frac{11520}{240}$ (243).

Or, on voit qu'en supprimant le dénominateur 240, qui

(*a*) Pour la preuve, on sait qu'il faut multiplier le quotient par le diviseur (197). Voyez l'exemple qui est la preuve de celui-ci (425).

est commun au diviseur et au dividende (256), ce qui ne fait que les multiplier par ce même dénominateur, et ce qui ne change rien au quotient (142), on a le nombre entier 320320 pour dividende, et le nombre entier 11520 pour diviseur; ou, en d'autres termes, on voit que le dividende ou le diviseur étant composés des mêmes parties de l'unité, peuvent être considérés comme des nombres entiers, puisqu'on ne fait en cela que les rendre la même quantité de fois plus grands l'un et l'autre (142): cela posé, on voit aussi que le dividende 320320 peut être considéré comme composé de toises ou d'unités d'une nature quelconque, puisque la quantité des unités dont le quotient doit être composé restera la même, quelle que soit l'espèce des unités du dividende (327); on divisera donc 320320, considéré comme des toises, par 11520, et on aura pour quotient 27 toises 4 pieds 10 pouces.

OPÉRATION.

320320.	
89920.	
9280.	
6.	
55680.	11520
9600.	27 toises 4 pieds 10 pouces.
12	
115200	
. 00000	

320320 toises divisées par 11520, par les moyens ordinaires, donnent d'abord 27 toises au quotient, plus un reste de 9280 toises, qui, réduites en pieds (*a*), donnent 55680 pieds, lesquels étant divisés par le diviseur donnent 4 pieds

(*a*) La toise vaut 6 pieds; 9600 toises valent donc 9600 toises × 6 pieds = 55680 pieds.

au quotient et un reste de 9600 pieds, qui, étant réduits en pouces (*a*), donnent 115200 pouces, qui étant enfin divisés par 11520, donnent 10 pouces au quotient; le quotient est donc 27 toises 4 pieds 10 pouces.

De la division d'un nombre complexe par un nombre complexe de même espèce.

332. *Lorsque le diviseur est un nombre complexe de même espèce que le dividende, il faut les réduire chacun en unités de la plus petite espèce de toutes celles qui les composent;* on aura par ce moyen deux nombres entiers pour diviseur et pour dividende, que l'on divisera comme à l'ordinaire, en traitant les unités du dividende, comme si elles étaient de la même espèce que celles que doit avoir le quotient.

1er. EXEMPLE.

L'aune de drap coûtant 34 l. 3 s. 11 d., on demande combien on aura d'aunes du même drap au même prix, pour 5368 l. 14 s. 11 d.

Il est évident qu'on aura une aune autant de fois que 34 liv. 3 s. 11 d. se trouvera contenu dans 5368 liv. 14 s. 11 d.; qu'ainsi, pour savoir combien on aura d'aunes pour 5368 l. 14 s. 11 d., il ne s'agit que de soustraire 34 l. 3 s. 11 d. autant de fois qu'il s'y trouvera contenu, d'où il suit que le quotient sera des aunes.

(*a*) Le pied vaut 12 pouc., les 960 pieds valent donc 960 pieds × 12 pouc. = 115200 pouc.

OPÉRATION.

5368 l. 14 s. 11 d.	34 l. 3. 11 d.
20 s.	20 s.
107374 s.	683 s.
12 d.	12 d.
1288499 d.	8207 d.
46779.	157 aunes *quotient.*
67449	
.0000	

Après avoir réduit le diviseur et le dividende en deniers, on les a considérés néanmoins comme deux nombres entiers, ce qui ne change rien au quotient (331); ensuite on a opéré la division comme si le dividende avait des unités de même espèce que celles que doit avoir le quotient.

Lorsque le diviseur n'exprime que des parties de l'unité principale du dividende ou que des unités d'un ordre inférieur, il faut réduire le dividende en unités d'un même ordre que celles qui composent le diviseur, et opérer la division, comme celle dont il vient d'être traité (332). Par exemple, si on propose de diviser 48 liv. 19 s. 11 den. par 11 deniers, il faut réduire le dividende d'abord en sous, c'est-à-dire, les 48 l. dont il est composé en sous, en les multipliant par 20 sous, et en ajoutant au produit les 19 sous, qui accompagnent les 48 liv. du dividende, ce qui donnera 979 s.; il faut ensuite réduire ces sous en deniers, en ajoutant au produit les 11 d. qui accompagnent les sous du dividende, ce qui donnera 11759 d., et il faut diviser 11759 par 11 selon la méthode ordinaire (331).

En effet, lorque les entiers du dividende sont des livres tels que ceux du dividende 48 liv. 19 s. 11 den., par exemple, et lorsque le diviseur n'est composé que de deniers comme le diviseur 11 d., par exemple, ces 11 d. ne sont autre chose que les $\frac{11}{240}$ d'une liv., c'est-à-dire, qu'une fraction (234 et 243); il faut donc, si on considère ces 11 d. $=\frac{11}{240}$ comme

11 entiers, réduire le dividende aussi en deniers, et considérer ces deniers comme des entiers, ce qui est faire le même changement au diviseur qu'au dividende (331), ce qui ne change rien au quotient (141); conséquemment, en opérant ensuite la division par les moyens ordinaires, on trouvera le quotient que l'on cherche.

2e. EXEMPLE.

333. La toise d'un certain ouvrage coûtant 21 liv. 19 sous 11 den., on demande combien on fera faire de toises de ce même ouvrage, au même prix, pour 3471 l. 1 s. 3 d. $\frac{19}{36}$.

Il est évident que pour savoir combien on fera faire de toises en total, il ne s'agit que de soustraire 21 liv. 19 s. 11 d. de 3471 liv. 1 s. 3 d. $\frac{19}{36}$, autant de fois qu'il s'y trouvera contenu; le quotient exprimera la quantité de toises et de parties de toise que l'on cherche.

3471 l. 1 s. 3 d. $\frac{19}{36}$.	21 l. 19 s. 11 d.
20 s.	20 s.
69421 s.	439 s.
12 d.	12 d.
833055 d.	5279 d.
36	36
4998330	31674
2499165 .	15837 .
19	
29989999 *dividende.*	190044 *diviseur.*
1098559 .	*Quotient* 157 t. 4 p. 10 p.
1483399	
153091	
6 pieds.	
918546 pieds *dividende.*	
158370	
1900440 pouc. *dividende.*	
00000	

Après avoir réduit les livres du dividende en sous, les sous en deniers, et les deniers en trente-sixièmes, afin de former du tout un nombre composé de trente-sixièmes de deniers (243), et, après avoir opéré les mêmes réductions sur le diviseur, on a eu le nombre 29989999 trente-sixièmes de deniers pour dividende, et le nombre 19044 trente-sixièmes de deniers pour diviseur; on a cependant considéré le dividende et le diviseur comme deux nombres entiers, ce qui a opéré sur l'un le même changement que sur l'autre; et on a opéré la division comme à l'ordinaire, en traitant les unités du dividende comme si elles étaient de même espèce que celles que doit avoir le quotient, ce qui ne change encore rien à la quantité des unités dont le quotient doit être composé.

Remarquons ici qu'en général :

334. Le dividende et le diviseur, après avoir subi l'un et l'autre les mêmes réductions, se trouvant composés chacun des mêmes parties de l'unité principale, peuvent être considérés comme les numérateurs de deux fractions qui ont un même dénominateur (331), et par conséquent peuvent être considérés comme deux nombres entiers, puisqu'on ne fait en cela que supprimer le dénominateur commun au diviseur et au dividende, ce qui est les multiplier chacun par ce même dénominateur (256). Donc :

335. Tout nombre fractionnaire ou complexe réduit en une fraction, dont on a supprimé le dénominateur, n'est autre chose qu'un nombre entier qui a été multiplié par ce même dénominateur (256).

De la division de deux nombres complexes d'espèce différente.

336. On peut ramener cette division à celle de deux nombres entiers comme (324); ou ce qui revient au même il faut :

1°. *Réduire le diviseur et le dividende chacun en unités de la plus petite espèce de toutes celles qui le composent* (243) ;

2°. *Multiplier le dividende par tous les multiplicateurs qui*

ont servi à réduire le diviseur en unités de la plus petite espèce, et ce dernier par tous les multiplicateurs qui ont servi à réduire le dividende en unités de la plus petite espèce;

Par ce moyen les deux termes de la division ayant été réduits en parties d'un même dénominateur qu'on a supprimé dans chacun (256), ce qui ne change rien au quotient (141), seront deux nombres entiers que l'on divisera l'un par l'autre selon la règle établie (114).

337. Mais en portant l'abréviation aussi loin qu'elle puisse aller;

La division de deux nombres complexes d'espèce différente, se réduit à la règle suivante.

1°. *Réduisez le dividende et le diviseur chacun en unités de la plus petite espèce de toutes celles qui le composent;*

2°. *Placez à la suite du dividende tous les multiplicateurs qui ont servi à réduire le diviseur en unités de la plus petite espèce, précédés chacun du signe de la multiplication, et à la suite du diviseur tous les multiplicateurs qui ont servi à réduire le dividende en unités de la plus petite espèce, précédés du même signe.*

Ayant ainsi indiqué tous les facteurs dont le dividende doit être le produit, ainsi que tous ceux du diviseur, il suffira ensuite *d'effacer par un trait de plume tous les facteurs communs au dividende et au diviseur; savoir, un au dividende, un au diviseur, et ainsi de suite autant de fois que cela sera possible, et de prendre des parties égales sur l'un des facteurs du dividende et sur l'un de ceux du diviseur autant de fois que cela sera possible sans reste, pour avoir les deux termes de la division réduits à leur plus simple expression, en formant les produits des facteurs qui restent* (269).

EXEMPLE.

157 marcs 7 onces 7 gros 2 deniers 21 grains d'argent, ont coûté 8215 l. 6 s. 1 den. $\frac{1345}{1536}$, on demande à combien cela fait revenir le marc?

En divisant 8215 liv. 6 sous 1 denier $\frac{1345}{1536}$, par 157 marcs 7 onces 7 gros 2 d. 21 grains, on trouvera le prix d'un marc.

OPÉRATION.

8215 l. 6 s. 1 d. $\frac{1345}{1536}$	157 m. 7 o. 7 g. 2 d. 21 g.
20	8
164306	1263
12	8
1971673	10111
1536	3
11830038	30335
5915019.	24
9858365..	121361 24
1971673...	60670. 4 192
1345	728061 × 20 × 12 × 1536
3028491073 × 8 × 8 × 3 × 24	80
116247073	58244880 *diviseur.*
58002193	51 l. 19 s. 11 d. *quot.*
20	
1160043860	
577595060	
53391140	
12	
640693680	
58244880	
00000000	

D'abord j'ai réduit le dividende en unités de la plus petite espèce, c'est à dire en quinze cents trente-sixièmes de deniers, et j'ai réduit le diviseur en grains.

J'ai supprimé les dénominateurs, ou, ce qui revient au même, j'ai considéré les deux termes, ainsi réduits, comme

deux nombres entiers ; mais comme j'ai multiplié le diviseur successivement par 8, par 8, par 3, par 24 pour le réduire en onces, puis en gros, puis en deniers, et enfin en grains, j'ai placé × 8 × 8 × 3 × 24 à la suite du dividende pour indiquer qu'il doit être multiplié successivement par ces divers nombres (337); et comme j'ai multiplié le dividende successivement par 20, par 12, par 1536 pour le réduire en sous, puis en deniers, puis en 1536[mes]. de denier, j'ai placé × 20 × 12 × 1536 à la suite du diviseur pour indiquer qu'il doit être multiplié par 20, par 12, et par 1536 successivement.

Par ce moyen en opérant les multiplications indiquées, j'aurai le diviseur et le dividende réduits en parties d'un même dénominateur..

Mais pour avoir les deux termes de la division réduits à leur plus simple expression :

1°. J'ai pris le huitième du facteur 8 et du facteur 1536, et j'ai effacé 8 et 1536 auxquels j'ai substitué 1 et 192, ou plutôt j'ai substitué 192 à 1536 ; car l'unité qui est substituée à 8 peut être supprimée (71), puisque l'unité étant facteur ne change rien au produit ;

2°. J'ai pris le huitième de 8 que j'ai effacé et celui de 192 que j'ai effacé, et auquel j'ai substitué son huitième qui est 24 ;

3°. J'ai supprimé ou effacé le facteur 24 tant au dividende qu'au diviseur ;

3°. J'ai pris le tiers de trois derniers des facteurs placés à la suite du dividende et le tiers de 12 l'un des facteurs du diviseur, lequel tiers qui est 4 j'ai substitué à 12 que j'ai effaeé.

Par ce moyen tous les facteurs placés à la suite du dividende se trouvent suprimés ; et comme on a fait aux facteurs du diviseur, les mêmes changemens qu'à ceux du dividende, les facteurs placés à la suite du diviseur se trouvent réduits à 20 × 4 = 80; d'où il suit qu'en multipliant enfin le diviseur par 80

on a 5824480 pour diviseur et 3028491073 pour dividende.

En opérant la division par les moyens ordinaires, et sachant que dans le quotient l'unité doit être 1 fr. j'ai eu 51 fr. 19 s. 11 d. pour quotient.

338. Toute la théorie de la division peut être réduite au principe suivant :

Il faut réduire le diviseur et le dividende à leur plus simple et commune expression (*a*).

Après quoi il faut diviser par les moyens ordinaires les deux nombres entiers résultant de cette réduction.

339. Après avoir donné un nombre suffisant d'exemples pour qu'on puisse faire sans difficulté l'*addition*, la *soustraction*, la *multiplication* et la *division* des nombres quelconques, dans tous les cas où les questions proposées se réduisent au premier aspect à l'une de ces quatre opérations fondamentales, il ne reste plus qu'à généraliser l'application de ces mêmes opérations, pour prouver que les questions compliquées s'y réduisent également.

La manière dont les géomètres comparent les grandeurs représentées par les nombres, et en déterminent les rapports offre cette application.

C'est ce qui a conduit à considérer, dans les nombres eux-mêmes, les *rapports* que l'on considère en géométrie dans les quantités qu'ils représentent, et ce qui exige qu'on se forme des notions des *rapports*.

(*a*) Ils auront été réduits en parties d'un même dénominateur, en suivant la règle établie (336) ; et à leur plus simple expression, en suivant la règle établie (337

ARITHMÉTIQUE
COMMERCIALE.

SECONDE PARTIE.

DES RAPPORTS, DES PROPORTIONS ET DES RÈGLES QUI EN DÉPENDENT.

Des rapports ou de l'application des opérations de l'arithmétique à la comparaison des grandeurs représentées par les nombres.

340 On ne peut connaître les grandeurs qu'en les comparant, et on ne peut les comparer en arithmétique qu'autant qu'elles sont représentées par des nombres.

341. Dans la comparaison de deux grandeurs de même nature, représentées par deux nombres ayant la même unité, on se propose de connaître leur différence, ou combien de fois l'une contient l'autre, ou une certaine partie de cette autre qui est prise pour lui servir de mesure ou d'objet de comparaison.

342. Pour déterminer la différence des deux nombres qui qui les représentent, il faut soustraire l'un de ces deux nombres de l'autre. Le reste ou la différence est ce qu'on appelle le rapport arithmétique ou différentiel des deux nombres.

Mais nous prévenons expressément ici que nous ne nous occuperons plus du rapport arithmétique comme étant étranger à l'objet du présent ouvrage (*a*).

(*a*) Pour les rapports arithmétiques, les logarithmes, etc., voyez l'*Arithmétique pratique*, du même auteur que le présent ouvrage.

343. Pour déterminer combien de fois l'un des deux nombres que l'on compare est grand comme l'autre, c'est-à-dire combien de fois il contient l'autre, ou quelle partie il contient de cet autre, il est évident qu'il faut diviser l'un par l'autre; par exemple, si on compare 20 à 5 pour savoir combien de fois 20 est grand comme 5, il faut diviser 20 par 5. Le quotient qui exprime ce nombre de fois est ce qu'on appelle le rapport géométrique de ces deux nombres, ou simplement leur rapport. Ainsi :

344. *Le rapport de deux nombres n'est autre chose que le quotient de la division de l'un de ces deux nombres par l'autre*, ou que le résultat de leur comparaison.

Le quotient ou le résultat de la comparaison de deux nombres est appelé rapport, parce qu'en le comparant à l'unité, il exprime le même rapport que ces deux nombres, ou n'est autre chose que leur rapport réduit à sa plus simple expression. En effet, ayant à comparer 20 à 5, le quotient 4 comparé à 1, exprime le même rapport que 20 comparé à 5. De même ayant 5 à comparer à 20, le quotient $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ comparé à 1, exprime le même rapport que 5 comparé à 20.

345. Ainsi : *un quotient et en général un nombre quelconque peut être considéré comme un rapport comparativement à l'unité. Et lorsque le rapport est exprimé par un seul terme, l'autre terme est l'unité;* mais en général tout rapport est exprimé par deux termes.

346. Pour marquer que l'on considère le rapport de deux nombres, on les sépare par ces deux points : ainsi cette expression 20 : 5 marque que l'on considère le rapport de 20 à 5, et ces deux points signifient que 20 *est comparé à* 5 ou plus brièvement 20 *est à* 5; enfin qu'il faut diviser l'un des deux nombres par l'autre pour en avoir le rapport.

347. Des deux nombres que l'on compare, celui qu'on écrit ou énonce le premier est appelé *antécédent*, celui qui vient après *conséquent*. Ainsi dans 20 : 5, 20 est l'antécé-

dent, 5 le conséquent. L'un et l'autre sont appelés les termes du rapport.

Il résulte de ce qui précède qu'en général :

348. *Pour avoir le rapport de deux quantités, il faut diviser l'une par l'autre.*

349. Nous évaluerons toujours le rapport en divisant l'antécédent par le conséquent, par la raison que, dans la comparaison directe des deux quantités, on compare toujours l'antécédent au conséquent qui sous ce point de vue sert de mesure à l'antécédent. Ainsi le rapport de 20 : 5 est 4; celui de 5 : 20 est $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ ainsi :

350. *Le rapport de deux nombres est toujours le quotient de l'antécédent par le conséquent, et peut être exprimé par une fraction qui a l'antécédent pour numérateur et le conséquent pour dénominateur.*

351. Sans les déplacer on peut néanmoins comparer en sens inverse les deux termes d'un rapport, c'est-à-dire, on peut comparer le conséquent à l'antécédent. Or, il est évident que sous ce nouveau point de vue le rapport est nécessairement l'inverse de ce qu'il est sous le précédent, puisque l'antécédent devient la mesure de la grandeur du conséquent, au lieu d'avoir ce dernier pour mesure; la manière de l'évaluer dans ce nouveau cas doit donc être l'inverse de la manière de l'évaluer dans l'autre; il faut donc actuellement diviser le conséquent par l'antécédent.

Pour éviter les méprises, le quotient du conséquent par l'antécédent, étant l'inverse de celui de l'antécédent par le conséquent, sera appelé le *rapport inverse*, ou la raison inverse de ces deux termes. Par exemple, dans 20 : 5, on a vu que le rapport est $\frac{20}{5} = \frac{4}{1} = 4$, en un mot est 4.

Le rapport inverse est $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, en un mot est $\frac{1}{4}$. Ainsi :

352. *Le rapport inverse des deux nombres que l'on compare est toujours le quotient du conséquent divisé par l'antécédent; et peut être exprimé par une fraction qui a le conséquent pour numérateur, et l'antécédent pour dénominateur.*

Mais toutes les fois qu'on n'avertira pas expressément que l'on considère le rapport inverse des deux quantités que l'on compare, il sera considéré sous son point de vue direct.

353. Rapport, quotient, fraction n'est qu'un même résultat considéré sous différens points de vue.

354. Lorsque deux nombres que l'on compare ont la même unité, on se propose de connaître le rapport des quantités qu'ils représentent. Par exemple, dans 25 aun. : 5 aun., on se propose de connaître le rapport de ces deux quantités d'aunes, lequel est 5.

355. Lorsque les deux nombres que l'on compare ont une unité différente, on les considère comme l'expresion de la valeur réciproque des quantités qu'ils représentent, et on se propose de connaître la valeur réciproque des deux unités qui leur servent de mesure, ou le rapport de la valeur de ces unités.

Par exemple : sachant que 5 aunes de toile valent 25 fr., si on compare ces nombres ainsi, 5 aunes : 25 fr., on considère 25 francs comme l'expression de la valeur de 5 aunes, et 5 aunes comme l'expression de la valeur de 25 fr.; ce que l'on peut exprimer ainsi : 5 aunes = 25 fr.; et on se propose de connaître la valeur réciproque de l'aune et du franc, c'ést-à-dire, le rapport de la valeur de ces unités.

Or, dans 5 aun. : 25 fr., il est évident qu'en divisant le conséquent par l'antécédent, le quotient ou le rapport inverse de ces deux nombres marquera la valeur de l'aune. En effet, puique 5 aunes valent 25 fr., il est évident que 1 aune vaut 25 fr. divisés par 5, c'est-à-dire, 5 fr. Ainsi :

356. Le rapport inverse de deux nombres qui ont une unité différente, et que l'on compare l'un à l'autre, exprime la valeur de l'unité de l'antécédent par un nombre ayant la même unité que le conséquent. Par ex., dans 5 aun. : 25 fr., le rapport inverse 5 marque que 1 aune vaut 5 fr. (355).

357. De même dans 5 aun. : 25 fr., il est évident qu'en divisant l'antécédent par le conséquent, le quotient ou le rapport marquera la valeur de 1 fr. En effet, puisque 25 f.

valent 5 aunes, il est évident que 1 fr. vaut 5 aunes divisées par 25 fr., c'est-à-dire, $\frac{5}{25}$ aun. = $\frac{1}{5}$ aun., en un mot vaut $\frac{1}{5}$ d'aune. Ainsi :

358. Le rapport de deux nombres qui ont une unité différente exprime la valeur de l'unité du conséquent, par un nombre ayant la même unité que l'antécédent. Par exemple, dans 5 aun. : 25 fr., le rapport $\frac{5}{25}$ aun. = $\frac{1}{5}$ aun. marque que 1 fr. vaut $\frac{1}{5}$ d'aune.

C'est ainsi, qu'en déterminant le rapport des unités qui servent de mesure à deux quantités d'espèce différente, on peut ramener la solution de toutes les questions relatives à ces quantités à de simples multiplications et divisions.

1er. Exemple.

359. Sachant que 100 marcs d'Hambourg valent 188 f. argent de France, c'est-à-dire, que 100 m. = 188 fr., on demande combien 545 marcs valent en argent de France.

Il est évident qu'en déterminant le prix ou la valeur d'un marc en argent, il ne s'agira plus que de multiplier ce prix par le nombre de marcs dont on cherche la valeur. Or, dans 100 m. : 188 fr., le rapport inverse $\frac{188\text{ fr.}}{100\text{ aun.}}$ = 1 fr. 88 cent., exprime la valeur de 1 marc en argent de France (356); ainsi, 1 fr. 88 × 545 m. = 1024, 60 c., est la valeur de 545 m. en argent de France.

2e. Exemple.

360. De même sachant que 100 marcs valent 188 fr., si on demandait combien 1024 fr. 60 centim. valent en argent d'Hambourg, il est évident qu'en déterminant le prix de 1 f. en argent de Hambourg, il ne s'agira plus que de multiplier ce prix par francs 1024, 60. Or, dans 100 : 188, le rapport $\frac{100}{188}$ marc exprime la valeur ou le prix de 1 fr. en fraction du marc (357); ainsi, $\frac{100}{188}$ m. × fr. 1024, 60 = 545 m., est la valeur de fr. 1024, 60 en marcs.

361. Il est évident aussi qu'en déterminant le prix de 1 m.

en argent de France, lequel prix n'est autre chose que le rapport inverse de 100 m. : 188 f. (356), c'est-à-dire, lequel est f. 1,88 c., il ne s'agirait plus que de diviser f. 1024,60 par f. 1,88, c. prix d'un marc, pour savoir combien f. 1024,60 valent de marc; en effet, 1024, 60, divisés par fr. 1,88 = 545 m.

362. Et il est évident encore qu'en reprenant le premier exemple, on peut en ramener aussi la solution à une division, comme on l'a fait pour le précédent. Car, dans 100 m. : 188 f., le rapport $\frac{100}{188}$ m. exprime en partie du marc d'Hambourg la valeur de 1 f.; donc, en divisant 545 marcs par $\frac{100}{188}$ marcs, valeur d'un franc, on trouvera combien 545 marcs valent de francs; en effet, 545 marcs divisés par $\frac{100}{188}$ = fr. 1024,60.

3e. Exemple.

363. L'intérêt de 100 fr. étant fixé à 5 fr., on demande quel est l'intérêt de 300 fr. au même taux.

Il est évident qu'en déterminant l'intérêt de fr. 1, il ne s'agira plus ensuite que de multiplier cet intérêt par 300. Or, l'intérêt de 100 fr. étant 5 fr., celui d'un franc est 5 fr. di-disés par 100, c'est-à-dire, $\frac{5}{100}$ fr. = $\frac{1}{20}$ fr.; ainsi, $\frac{1}{20}$ fr. $\times$ 300 = 15, est l'intérêt de 300 fr.

4e. exemple.

364. 5 aunes coûtant 25 fr., on demande combien on aura d'aunes pour 2725 fr.

On sait que le rapport de 5 aun. : 25 fr. fait connaître la valeur de 1 fr. en parties de l'aune (358). Or, en multipliant $\frac{1}{5}$ aune valeur d'un franc par 2725 fr., on trouverait 545 aun. pour la valeur de 2725 fr.

365. Mais le rapport inverse 5 ferait aussi connaître en francs la valeur de 1 aune. Or, en divisant 2725 par 5 fr., prix de l'aune, il est évident que l'on trouverait le nombre d'aunes que l'on doit avoir pour 2725 fr., et que ce nombre serait 545 aunes.

On peut conclure de ce qui précède, qu'en déterminant le rapport d'une unité à une autre; on peut ramener en effet à de simples multiplications ou divisions, toutes les questions semblables à celles qui viennent d'être proposées. Les questions plus compliquées pouvant de même y être ramenées, prouveraient également que la faculté d'en faire l'analyse est tout ce qui constitue un bon calculateur, avec la connaissance des quatre règles fondamentales de l'arithmétique.

366. Quelle que soit la nature de l'unité des deux nombres que l'on compare, leur rapport direct ou inverse est toujours le même nombre. En effet, le rapport direct ou inverse n'étant autre chose qu'un quotient (344), ce dernier est toujours le même, quelle que soit la nature de l'unité du dividende et du diviseur (327). Mais il faut observer que, lorsque l'un des termes du rapport n'est qu'une fraction à l'égard de l'autre, ou encore que quand les deux termes du rapport sont deux fractions ou deux nombres fractionnaires ou complexes, on doit préalablement en ramener la division à celle de deux nombres entiers (336).

367. Dans la comparaison directe de deux quantités, l'*antécédent* est un vrai dividende; le *conséquent* un vrai diviseur; et le *rapport* un vrai quotient.

368. Dans leur comparaison inverse, le *conséquent* est un vrai dividende; l'*antécédent* un vrai diviseur; et le *rapport inverse* un vrai quotient. Ainsi :

369. Le conséquent multiplié par le rapport est égal à l'antécédent. Par exemple, dans 20 : 5, dont le rapport est 4, $5 \times 4 = 20$. En effet le diviseur, multiplié par le quotient, est égal au dividende (367).

370. L'antécédent, multiplié par le rapport inverse, est égal au conséquent. Par exemple, dans 20 : 5, dont le rapport inverse est $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, $20 \times \frac{1}{4} = 5$. En effet le diviseur, multiplié par le quotient, est égal au dividende (368).

371. De même le conséquent, divisé par le rapport in-

verse, est égal à l'antécédent. Par exemple, dans 20 : 5, dont le rapport inverse est $\frac{1}{4}$, 5 divisé par $\frac{1}{4} = 20$ (*a*). En effet, le dividende peut être considéré comme un produit dont le diviseur et le quotient sont les facteurs. Or, en divisant un produit par l'un de ses deux facteurs, on doit trouver l'autre.

372. Par les mêmes raisons, l'antécédent divisé par le rapport est égal au conséquent. Par exemple, dans 20 : 5, dont le rapport est 4, 20 divisé par $4 = 5$ (*b*).

Propriété des rapports.

373. Ayant le rapport et l'un des deux termes dans lesquels on le considère, on peut trouver l'autre terme. En effet, ayant le *conséquent* et le *rapport*, leur produit donnera l'*antécédent* (369).

374. Ayant l'*antécédent* et le *rapport*, le quotient du premier par le second donnera le *conséquent* (372). De même,

375. Ayant le *rapport inverse* et l'un des deux termes dans lesquels on le considère, on peut trouver l'autre terme. En effet :

En multipliant l'*antécédent* par le *rapport inverse*, on aura le *conséquent* (370).

En divisant le *conséquent* par le *rapport inverse*, on aura l'*antécédent* (371). Ou plus généralement :

376. *En multipliant l'antécédent par le rapport inverse, ou en le divisant par le rapport, on aura le conséquent* ;

377. *Et en multipliant le conséquent par le rapport, ou*

(*a*) Ayant un $\frac{1}{4}$ pour diviseur, en supprimant le dénominateur 4, on aura 1 pour diviseur, et il faudra multiplier le conséquent ou le dividende 5 par 4 (141); on aura alors à diviser 20 par 1, et le quotient sera 20. Ainsi, diviser 5 par $\frac{1}{4}$, ou le multiplier par 4, c'est la même chose. Donc, en général, diviser le conséquent par le rapport inverse, ou le multiplier par le rapport, c'est la même chose.

(*b*) Diviser l'antécédent par le rapport, ou le multiplier par le rapport inverse, c'est la même chose. Par exemple, dans 20 : 5, diviser par 4, ou multiplier 20 par $\frac{1}{4}$, c'est la même chose; car en effet $\frac{20}{4} = 20 \times \frac{1}{4} = 5$.

en le divisant par le rapport inverse, on aura l'antécédent.

378. *Un rapport reste le même quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre.*

Et cette nouvelle propriété sert à réduire ses deux termes en parties d'un même dénominateur, ainsi qu'à le réduire à sa plus simple expression. En effet, ayant à examiner le rapport de deux nombres fractionnaires ou complexes, ou même de deux fractions, il est évident qu'on peut considérer les deux termes de ce rapport comme ceux d'une division, et ramener cette division à celle de deux nombres entiers, ce qui ne change rien au quotient ou au rapport. Pour les exemples, voyez (330), (331), (332), (337). Ou plus généralement :

379. *Tout ce qui a été dit des deux termes d'une division et de leur quotient, relativement à l'effet, sur le quotient, des changemens faits au diviseur et au dividende, s'applique dans le même sens au rapport direct ou inverse et à ses deux termes;* or, on a vu (269) qu'on l'appliquait également à une fraction et à ses deux termes.

380. Il ne s'agit donc de rien que l'on ne connaisse déjà dans la théorie des rapports; mais, comme deux rapports égaux constituent ce qu'on appelle une *proportion*, et comme, dans toutes les questions que l'on peut proposer sur l'arithmétique, il existe le même rapport entre un nombre qui s'y trouve énoncé et celui que l'on cherche, qu'entre deux autres nombres qui s'y trouvent aussi énoncés, on peut y considérer deux rapports égaux, c'est-à-dire, une *proportion*, et appliquer à la solution de ces questions ce qu'on appelle la règle de proportion ou de trois, par laquelle, trois termes d'une proportion étant donnés, on trouve avec une extrême facilité le quatrième, qui doit être avec le troisième dans un rapport égal à celui des deux autres.

C'est ce qui exige qu'on ait une idée exacte des proportions et qu'on les examine en particulier, quoiqu'il ne s'agisse en cela que d'examiner les mêmes questions, les mêmes quan-

tités, les mêmes opérations et les mêmes résultats sous un nouveau point de vue.

Des proportions.

381. Lorsque quatre quantités sont comparées de telle manière que le rapport des deux dernières est le même que celui des deux premières, elles sont en proportion et forment ce qu'on appelle une proportion (*a*). Les quatre quantités 4, 2 6, 3, forment une proportion parce que le rapport des deux dernières est le même que celui des deux premières; ou en d'autres termes parce que le quotient de 6 par 3 est le même que celui de 4 par 2, en un mot est 2.

382. Pour marquer qu'elles sont en proportion on les écrit ainsi, 4 : 2 :: 6 : 3, c'est-à-dire on sépare les deux termes de chaque rapport par deux points, et les rapports eux-mêmes par quatre points; les deux points signifient *est à*, et les quatre points *comme*; de sorte qu'on dit, 4 est à 2 comme 6 est à 3. En un mot.

383. *Les deux rapports égaux exprimés par quatre termes, voilà ce qui constitue ou forme une proportion.* Ainsi:

384. Dans toute proportion, le second rapport est le même que le premier, ou, en d'autres termes, est égal au premier et réciproquement. Par exemple, dans la proportion, 4 : 2 :: 6 : 3, le rapport des deux derniers termes est le même que celui des deux premiers, et c'est par cette raison qu'on dit que ces quatre termes sont en proportion.

385. Le premier et le dernier termes de la proportion s'appellent les extrêmes, le second et le troisième s'appellent les *moyens*, comme étant entre les extrémités. Considérés en

---

(*a*) Une proportion est appelée arithmétique ou géométrique, selon que le rapport qu'on y considère est arithmétique ou géométrique (343); mais nous prévenons expressément ici que nous ne nous occuperons que des proportions géométriques, que nous appelerons simplement proportions.

particulier, le 1er. et le 2e. termes sont aussi appelés 1er. *antécédent*, 1er. *conséquent*, les deux autres 2e. *antécédent* et 2e. *conséquent*.

Propriétés des proportions.

Les 4 termes d'une proportion formant toujours deux rapports égaux, il en résulte les propriétés suivantes.

386. Trois termes d'une proportion étant connus on trouvera le quatrième par une simple multiplication, savoir : si c'est l'un des deux conséquens que l'on cherche, en multipliant son antécédent par le rapport inverse des deux autres; si c'est au contraire l'un des deux antécédens, en multipliant son conséquent par le rapport des deux autres termes.

En effet, les deux rapports qui constituent une proportion étant égaux, il est évident que le premier est le même que le second et réciproquement. Qu'ainsi l'antécédent, dont le conséquent est inconnu, étant multiplié par le rapport inverse des deux autres termes, on trouve le conséquent que l'on cherche (370); et que le conséquent dont l'antécédent est inconnu, étant multiplié par le rapport des deux autres termes, on trouvera l'antécédent que l'on cherche (369).

Par exemple, dans $4 : 2 :: 6 : 3$ on trouverait le second conséquent, s'il était inconnu, en multipliant le second antécédent par le rapport inverse des autres termes. En effet le rapport inverse des deux premiers termes est $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, et le second antécédent est 6; or, $6 \times \frac{1}{2} = 3$ qui est le second conséquent.

On trouverait le second antécédent, s'il était inconnu, en multipliant le second conséquent par le rapport des deux autres termes. En effet le rapport des deux premiers termes est 2, et le second conséquent est 3; or, $3 \times 2 = 6$, qui est le second conséquent (*a*).

(*a*) On trouverait de même le quatrième terme d'une proportion par une simple division, ayant les trois autres termes. Savoir : si l'un des conséquens était l'inconnu, on le trouverait en divisant son anté-

387. *Le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.* Par exemple, dans cette proportion 4 : 2 :: 6 : 3, le produit de 4 par 3 et celui de 2 par 6 sont également 12.

En effet, dans chacun des deux rapports égaux dont une proportion est formée, le conséquent multiplié par le rapport est égal à l'antécédent (369); on peut donc, dans chacun de ces rapports, substituer à l'antécédent le conséquent multiplié par le rapport, sans changer le rapport ni la proportion; par exemple, dans 8 : 2 :: 12 : 3, on peut substituer au premier antécédent 8, son conséquent 2 multiplié par le rapport 4, et au second antécédent 12, le second conséquent 3 multiplié par le rapport 4, ce qui donne cette proportion $2 \times 4 : 2 :: 3 \times 4 : 3$ qui est la même que la précédente; et alors, en formant le produit des extrêmes, on aura pour leur produit *le premier conséquent multiplié par le second, multiplié par le rapport;* et en formant celui des moyens on aura, *le premier conséquent, multiplié par le second, multiplié par le rapport.* Or, ces deux produits sont évidemment égaux puisqu'ils ont les mêmes facteurs, et l'identité se montre jusque dans les mots. Enfin il est évident encore qu'il en serait de même dans toute autre proportion; car, pour que le produit des extrêmes ne fût pas le même que celui des moyens, il faudrait que le rapport des deux derniers termes ne fût pas le même que celui des deux premiers, parce qu'alors le produit des deux extrêmes, serait : *le premier conséquent multiplié par le second, multiplié par le rapport des deux premiers termes*; le produit des moyens serait : *le pre-*

---

cédent par le rapport des deux autres termes (372); si l'un des antécédens était l'inconnu, on le trouverait en divisant son conséquent par le rapport inverse des deux autres termes; mais ces opérations sont les mêmes que les précédentes. Voyez les notes des numéros (371) et (372) : il n'est pas nécessaire que l'on s'en occupe en particulier. L'objet essentiel de ce chapitre est de donner une idée exacte de la règle de trois ou de proportion.

mier conséquent multiplié par le second, multiplié par le rapport des deux derniers termes. Or, il est évident que le dernier rapport, étant différent de celui des deux autres termes, le produit des moyens ne pourrait être égal à celui des extrêmes, ayant un de ces trois facteurs différens, puisque tout produit augmente ou diminue à mesure que l'on augmente ou diminue un de ses facteurs (125); mais alors les quatre termes ne formeraient pas une proportion (383). Donc *dans toute proportion le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.* Il résulte de cette seconde propriété des proportions qu'en général :

388. Trois termes d'une proportion étant connus, on trouvera le quatrième, si c'est l'un des extrêmes, en divisant le produit des moyens par l'extrême que l'on connaît; si c'est l'un des moyens, en divisant le produit des extrêmes par le moyen que l'on connaît : le quotient sera le terme que l'on cherche. Par exemple, dans $4 : 2 :: 6 :: x$ où le dernier des extrêmes étant inconnu est représenté par x, pour avoir l'extrême inconnu, il faut multiplier 6 par 2 dont le produit 12 est le même que celui des deux extrêmes : et il faut diviser ensuite 12 par 4 l'un des deux extrêmes; le quotient 3 sera l'autre extrême. De même, dans $4 : 2 :: x : 3$, il faut multiplier les extrêmes et diviser leur produit 12, qui est égal à celui des moyens, par 2, l'un des deux moyens : le quotient 6 sera l'autre moyen.

En effet, puisque le produit des extrêmes est le même que celui des moyens, il est évident qu'en divisant le produit des moyens par l'un des deux extrêmes, on doit trouver l'autre; comme, en divisant le produit des extrêmes par l'un des deux moyens, on trouverait l'autre (94).

Puisque dans toute proportion le produit des extrêmes est nécessairement égal à celui des moyens, *lorsque quatre quantités sont telles que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, elles sont en proportion.* Il en résulte cette nouvelle propriété des proportions:

389. *Lorsque quatre quantités sont en proportion, elles y seront encore si l'on met les extrêmes à la place des moyens, et ces derniers à celle des extrêmes;* et encore *si l'on échange les places des extrêmes et celles des moyens.*

En effet, dans tous ces cas il est aisé de voir : 1°. que le produit des extrêmes sera toujours égal à celui des moyens; 2°. *que chacun des produits restera le même quoiqu'on échange les places de ses deux facteurs* (136); 3°. qu'en divisant le produit des moyens par l'extrême connu on trouverait toujours l'extrême inconnu; comme, en divisant le produit des extrêmes par l'un des deux moyens, on trouverait l'autre (388).

390. La proportion 4 : 8 :: 6 : 12, par exemple, peut donc fournir, sans être détruite, les huit proportions suivantes, par la seule permutation de ses termes; et celui de ses termes qui sera pris pour l'inconnu restera le même.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4 & : & 8 & :: & 6 & : & 12 \\ 4 & : & 6 & :: & 8 & : & 12 \\ 12 & : & 6 & :: & 8 & : & 4 \\ 12 & : & 8 & :: & 6 & : & 4 \\ 8 & : & 12 & :: & 4 & : & 6 \\ 8 & : & 4 & :: & 12 & : & 6 \\ 6 & : & 4 & :: & 12 & : & 8 \\ 6 & : & 12 & :: & 4 & : & 8 \end{array}$$

Et il en est de même de toute autre proportion. Donc, en général :

391. Trois termes d'une proportion étant connus, elle peut toujours être établie de manière que celui qui est inconnu en soit le quatrième terme. Par exemple, dans 4 : 8 :: 6 : 12, en supposant que 4 fût le terme inconnu, on a vu qu'il peut occuper la place du premier, du second, du troisième ou du quatrième termes dans la proportion sans la détruire (390), ou sans cesser d'être le même; il peut donc toujours en être considéré comme le quatrième terme.

Mais alors, pour ne pas détruire la proportion, il faut l'établir de manière que ses deux premiers termes forment le même rapport que celui que doit former le troisième avec le quatrième, qui est inconnu et représenté par x. Ainsi la proportion ci-dessus se réduirait à celle-ci, $12 : 6 :: 8 : x$; et après cela on en trouverait toujours le quatrième terme, en multipliant le troisième par le second, et en divisant leur produit par le premier terme; car c'est diviser le produit des moyens par l'extrême connu (388). Or, l'énoncé de chacune des questions, qui ont pour objet de trouver le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers termes sont donnés, fait toujours connaître *que l'un des trois termes donnés est plus grand ou plus petit que celui que l'on cherche*, *dans le même rapport que l'un des deux autres termes donnés est plus grand ou plus petit que l'autre;* ce qui conduit à former, avec ces deux derniers, le même rapport que doivent former les deux autres.

On en a conclu que toutes les questions, dans lesquelles trois termes d'une proportion étant donnés il s'agit de trouver le quatrième, peuvent être ramenées à une seule et même opération arithmétique, qu'on appelle la *règle de trois.*

De la règle de trois.

392. Cette règle n'est autre chose que celle de proportion, ramenée dans toutes ses applications à une même opération arithmétique.

Elle est appelée règle de trois, parce qu'elle a pour objet de faire trouver le quatrième terme d'une proportion dont trois termes sont connus; et parce qu'en établissant la proportion de manière que *ses deux premiers termes forment le même rapport que celui que doivent former le troisième et le quatrième qui est inconnu*, on trouve toujours après cela le quatrième, *en multipliant le troisième par le second*, *et en divisant leur produit par le premier terme.*

En effet, multiplier le troisième terme d'une proportion

par le second, c'est former le produit des moyens; diviser ensuite ce produit par le premier terme, c'est diviser le produit des moyens par l'un des extrêmes: donc on doit trouver au quotient le dernier des extrêmes: ou le quatrième terme.

Par exemple, dans 12 : 6 :: 8 : 4, le quatrième terme étant supposé inconnu, on aurait cette proportion 12 : 6 :: 8 : x. Or, étant ainsi établie, les deux premiers termes forment le même rapport que celui que doivent former les deux autres: ainsi il est évident qu'on aura un quatrième terme, qui sera au troisième ce que le second est au premier, en multipliant 8 par 6, et en divisant le produit 48 par 12; car c'est former le produit des moyens et le diviser par l'extrême connu, pour avoir l'autre extrême, qui est ici 4 ou le quatrième terme de la proportion.

Maintenant, on peut observer que dans 12 : 6 :: 8 : x le premier rapport inverse est $\frac{6}{12}$ (352); et que, pour avoir le conséquent du second rapport, il suffit de multiplier le second antécédent par le rapport inverse des deux autres termes (375); qu'ainsi, en multipliant 8 par la fraction $\frac{6}{12}$, c'est-à-dire, par le rapport inverse des deux premiers termes de la proportion, on doit trouver le dernier. Or, pour multiplier 8 pár $\frac{6}{12}$, il faut multiplier d'abord 8 par 6, et diviser ensuite le produit 48 par 12, ce qui est la même opération que multiplier le troisième terme par le second, et en diviser le produit par le premier pour avoir le quatrième inconnu, ou encore que former le produit des moyens, et le diviser par l'extrême connu pour avoir l'extrême inconnu. Donc, en général:

393. Ayant trois termes d'une proportion lorsqu'on l'établit, de manière que *les deux premiers termes composent le même rapport que celui que doit composer le troisième avec le quatrième qui est inconnu, on aura ensuite le terme inconnu en multipliant le troisieme par le second, et en divisant leur produit par le premier terme.*

C'est ainsi qu'on ramène la solution de tous les problèmes qu'on peut proposer sur la règle de proportion, à une seule et même opération arithmétique, c'est-à-dire, à la règle de trois.

On voit que la seule difficulté consiste à savoir établir la proportion dont les deux premiers termes doivent composer le même rapport que le troisième, avec le quatrième qui est inconnu et que l'on cherche.

Établir cette proportion, c'est ce qu'on appelle poser la *règle de trois*.

Le problème dont cette règle résulte est résolu lorsqu'elle est bien posée, puisque l'opération arithmétique, par laquelle on trouve ensuite le terme que l'on cherche, ne peut présenter la moindre difficulté.

De la manière de poser la règle de trois.

394. Dans toutes les questions où, les trois premiers termes d'une proportion étant *donnés*, on se propose de trouver le quatrième, l'énoncé de chacune renferme toujours trois quantités connues, *dont deux sont de même nature l'une que l'autre, dont la troisième est de même nature que le terme que l'on cherche, et doit former avec ce dernier le second des deux rapports égaux*, dont la proportion qu'il s'agit d'établir doit être formée (395).

395. Ce même énoncé fait aussi connaître que *la quantité, qui est de même nature que le terme que l'on cherche, est plus grand ou plus petit que celui-ci, dans le même rapport que l'une des autres quantités connues est plus grande ou plus petite que l'autre.*

Il est facile d'en conclure que *les deux quantités de même nature l'une que l'autre doivent composer le même rapport que celui que doit composer le terme de même nature que l'inconnu avec celui-ci*, c'est-à-dire, que celui qui doit composer le troisième terme avec le quatrième que l'on cherche. Ainsi :

396. Des deux quantités connues qui sont de même nature et qui doivent composer le premier rapport,

La plus grande doit être mise à la place du premier terme, la plus petite à celle du second terme d'une proportion, qui aura la quantité de même espèce que l'inconnue pour troisième terme, et cette dernière représentée par x pour le quatrième, *lorsque la quantité de même nature que l'inconnue est plus grande que celle-ci.*

397. Lorsque la quantité de même nature que l'inconnue est au contraire plus petite que celle-ci, des deux quantités connues qui sont de même nature, la plus petite doit être mise à la place du premier terme, la plus grande à celle du second terme d'une proportion qui aura pour troisième terme la quantité de même nature que l'*inconnue*, et dont cette dernière sera le quatrième terme.

398. Or, on sait que le produit des termes moyens reste le même, quoiqu'on en échange les places (389), et par conséquent que le quotient de la division de ce produit par le premier terme sera le même après qu'on aura mis le troisième terme à la place du second, et celui-ci à la place du troisième.

La méthode pour poser la règle de trois peut donc être réduite aux principes suivans.

Principes pour poser la règle de trois.

399. Des deux quantités connues qui sont de même nature,

Il faut poser la plus grande à la place du premier terme, lorsque la quantité de même nature que celle que l'on cherche est plus grande que celle-ci;

Il faut au contraire poser la plus petite à la place du premier terme, lorsque la quantité de même nature que celle que l'on cherche est plus petite que cette dernière.

On peut ensuite établir les deux autres termes, l'un à la

place du second terme, l'autre à celle du troisième indifféremment (398).

La solution de tous les problèmes sur les proportions se réduit donc à savoir poser à la place du premier terme la plus grande ou la plus petite des deux quantités connues qui sont de même nature, selon que la quantité de même espèce que l'inconnue est plus grande ou plus petite que cette dernière.

OPÉRATION.

400. On aura le quatrième terme de la proportion en multipliant le troisième terme par le second, et en divisant le produit par le premier terme (393).

Cette opération ne peut présenter la moindre difficulté lorsque l'on sait bien les quatre règles fondamentales de l'arithmétique; mais pour l'abréger :

401. 1°. Il faut réduire les deux quantités connues qui sont de même nature, en unités d'un même dénominateur comme les deux termes d'une division (332 et 333); ce qui ne change rien à leur rapport ou quotient, ni à la proportion;

402. 2°. Il faut réduire la proportion à une plus simple expression, en prenant des parties égales sur le premier terme et sur l'un des deux autres indifféremment, autant de fois que cela est possible sans reste, ou plus généralement;

403. 3°. *On peut augmenter ou diminuer le premier terme et augmenter ou diminuer dans le même rapport l'un des deux autres termes*, *indifféremment*, sans détruire la proportion; et réciproquement.

En effet, il est évident qu'on peut appliquer aux deux extrêmes comme aux deux moyens et à leur produit ce qui a été dit des facteurs d'une multiplication et de leur produit, ainsi : le produit des extrêmes demeure égal à celui des moyens, lorsqu'on multiplie et qu'on divise, par un même

nombre, l'un des extrêmes et l'un des moyens; car, si le produit des extrêmes augmente ou diminue à mesure qu'on augmente ou diminue un des extrêmes (125), celui des moyens augmente ou diminue de même, à mesure qu'on augmente ou qu'on diminue l'un des moyens dans le même rapport; d'où il suit qu'ayant fait des changemens égaux et des produits égaux, ils demeurent égaux.

Or, le quatrième terme que l'on cherche reste aussi le même, puisque le produit des moyens doit être divisé par l'un des extrêmes ou le premier terme; car, si le dividende augmente ou diminue à mesure qu'on augmente ou diminue l'un des moyens (125), le diviseur augmente ou diminue de même à mesure qu'on augmente ou diminue dans les mêmes rapports l'un des extrêmes, c'est-à-dire, le premier terme; et on sait que le quotient reste le même quand on fait les mêmes changemens au diviseur qu'au dividende;

404. 4°. Il faut enfin multiplier le troisième terme par le second, et diviser leur produit par le premier terme.

Le quotient sera le quatrième terme de la proportion, *et doit avoir la même unité que la quantité connue qui est de même nature que l'inconnue* (a).

(a) *Usages des proportions précédentes.*

Les proportions qui viennent d'être démontrées, et qu'on appelle les règles de proportions, ont des applications continuelles dans toutes les parties des mathématiques. Nous nous bornerons ici à celles qui appartiennent à l'arithmétique commerciale; mais nous ne craindrons pas de les multiplier, afin qu'en faisant succéder la pratique à la théorie, par le plus grand nombre d'exemples différens que la pratique présente, les élèves puissent se les rendre tous familiers, et obtenir par ce moyen de devenir de bons calculateurs pratique, ce qu'on n'obtient ordinairement que d'une longue expérience, parce que les mathématiciens dédaignent le moyen que nous croyons devoir employer ici.

Nous ne suivrons pas non plus l'exemple de la plupart des praticiens qui distinguent, sans nécessité, la règle de trois en *directe* et *indi-*

405. Il a une infinité de questions que l'on résout par le moyen de la règle de trois; mais il ne s'agit dans toutes que d'une seule et même règle, la règle de trois, quoique les arithméticiens pratique donnent aux opérations rélatives aux questions proposées sur l'exemple, le change, la tare, l'alliage, etc., les noms particuliers de règles d'escompte, de change, de tare, d'assurances, de compagnie, etc.

Donnons maintenant des exemples.

Exemples sur la manière de poser la règle de trois.

1er. EXEMPLE.

Reprenons l'exemple déjà proposé (359).

406. Sachant que 100 marcs argent de banque d'Hambourg valent 188 fr. argent de France, on demande combien 545 marcs argent de banque d'Hambourg valent en argent de France.

La valeur de 100 marcs, c'est-à-dire, 188 fr. est le terme de même nature que celui que je cherche, puisque ce dernier doit être en argent de France la valeur de 545 marcs. Or, il

---

recte, parce qu'on peut toujours ramener l'indirecte à la règle de trois directe, que nous appellerons plus simplement règle de trois, en échangeant les places des deux termes du premier rapport de la proportion indirecte. En effet, la proportion indirecte n'a lieu que dans le cas où les deux termes de l'un des deux rapports égaux, dont toute proportion est formée, sont comparés en sens inverse des deux termes de l'autre rapport. Or, on peut rendre une semblable proportion directe en mettant le deuxième terme à la place du premier, et celui-ci à la place du deuxième, c'est-à-dire, en comparant les deux termes de chaque rapport dans le même sens. Par exemple, dans la proportion $4 : 2 :: 3 : 6$, 4 est à 2 en raison inverse de ce qu'est 3 à 6, parce que dans le second de ces deux rapports égaux le plus petit des deux termes est l'antécédent et l'autre le conséquent, et que, dans le premier rapport au contraire, le plus grand des deux termes est l'antécédent et le plus petit conséquent; d'où il suit que le premier rapport, qui doit être égal au second, ne peut lui être égal en effet,

est évident que la valeur de 100 marcs est plus petite que 545 marcs ; en un mot que le terme que je connais est plus petit que celui de même nature que je cherche dans le même rapport ; que le nombre 100 m. est plus petit que 545 m. ; donc (399) la proportion doit être établie ainsi :

100 m. : 545 m. :: f. 188 : $x =$ f. 1024. 60 c.
ou ainsi 100 m. : f. 188 :: 545 m : $x =$ f. 1524. 60 c. (389).

Pour avoir le terme inconnu on a multiplié le troisième par le second, et divisé leur produit par le premier, en observant que le produit de cette multiplication et le quotient de cette division doivent avoir un franc pour unité, par la raison que la quantité connue qui est de même nature que l'inconnue est 188 fr. (404).

2ᵉ. EXEMPLE (*déjà proposé*) (360).

407. L'intérêt de 100 fr. étant fixé à 5 fr. ou en d'autres termes l'intérêt étant à 5 pour 100, on demande quel est l'intérêt de 300 fr. au même taux?

---

qu'autant qu'on l'évalue en sens inverse de la manière d'évaluer le second. Or, il est évident qu'en comparant les deux termes du premier rapport dans le même sens que l'on compare ceux du second, c'est-à-dire, qu'en comparant le plus petit des deux termes au plus grand ; dans le premier comme dans le second rapport, la manière d'évaluer les deux rapports sera après cela la même, ou, en d'autres termes, la proportion deviendra directe ; comme dans l'exemple ci-dessus, où la proportion inverse 4 : 2 :: 3 : 6 s'échange en cette proportion directe 2 : 4 :: 3 : 6, en échangeant les places des deux termes du premier rapport de la proportion indirecte.

On peut donc toujours ne considérer qu'une proportion directe, ou plus simplement qu'une proportion dans toutes les questions qui peuvent être proposées sur la règle de trois, en les réduisant toutes à une proportion dont trois termes sont connus, et dont les deux premiers doivent composer le même rapport que doivent composer les deux derniers, et en observant toujours que la quantité inconnue en doit être le quatrième terme.

5 fr. qui sont l'intérêt d'un capital de 100 fr. est le terme de même espèce que celui que je cherche; et, comme ce dernier doit être l'intérêt de trois cents fr., il est évident que l'intérêt 5 fr. que je connais est plus petit que celui que je cherche, comme 100 fr. est plus petit que 300 fr. Donc (399) la proportion doit être établie ainsi :

100 f. : 300 :: 5 f. : $x = 15$ f.

ou ainsi, 100 f. : 5 f. :: 300 : $x = 15$ f. (389).

Nota. 15 fr., qui est le quatrième terme, est l'intérêt que l'on cherche (404).

3e. EXEMPLE *déjà proposé* (361).

408. 5 aunes de toile coûtant 25 fr., on demande combien on aura d'aunes de cette même toile au même prix pour 2725 fr.

5 aunes est la quantité de même nature que celle que je cherche; il est évident qu'elle est plus petite que celle-ci, comme 25 fr. est plus petit que 2725.

Donc (399) la proportion doit être établie ainsi :

25 fr. : 2725 :: 5 aun. : $x = 545$ aun. (404.)

4e. EXEMPLE (*ou preuve du précédent*)

409. 545 aunes coûtant 2725 fr., on demande combien on aura d'aunes de même toile, au même prix, pour 25 fr.?

545 aunes, qui est la quantité de même espèce que celle que je cherche, est plus grande que cette dernière, comme 2725 est plus grand que 25; donc (399) j'établis la proportion ainsi :

2725 fr. : 25 fr. × 545 aunes : $x = 5$ aun. (404).

5e. EXEMPLE.

410. 8 hommes ont fait dans un certain temps 60 toises

d'ouvrage, on demande combien 12 hommes pourraient en faire à proportion dans le même temps?

12 hommes, travaillant de la même vitesse à un même ouvrage, en feront plus que huit hommes : ainsi le nombre 60 toises que je connais est plus petit que celui de même espèce que je cherche, comme le nombre 8 est plus petit que 12. Donc (399).

8 hom. : 12 hom. :: 60 toises : $x =$ 90 toises (404).

6e. EXEMPLE.

411. 20 hommes ont fait un certain ouvrage en 12 jours, on demande combien il faudrait d'hommes proportionnellement pour faire le même ouvrage en trois jours?

20 hommes, qui est la quantité de même nature que celle que je cherche, est plus petite que cette dernière; car il faut plus d'hommes pour un même ouvrage à mesure qu'ils travailleront moins de jours. Donc (399) :

3 jours : 12 :: 20 hom. : $x =$ 80 hom.
ou (402) 1 jour : 4 :: 20 hom. : $x =$ 80 hom.

7e. EXEMPLE.

412. Ayant prêté un capital au denier 20, la rente s'élève à 3500 fr., on demande quelle serait la rente de ce même capital au denier 25?

La rente de 3500 fr., qui est la quantité de même espèce que celle que l'on cherche est plus grande que cette dernière, dans le même rapport que l'un des deux capitaux 25 deniers et 20 deniers est plus grand que l'autre; car la rente d'un denier sur 25 est plus grande que celle d'un denier sur 20, le capital prêté étant le même; donc (399).

25 : 20 :: 3500 : x
ou (401) 5 : 4 :: 3500 : x
ou (402) 1 : 4 :: 700 : $x =$ 2800.

Exemples tant sur la manière de poser que d'opérer la règle de trois et de l'abréger.

8ᵉ. EXEMPLE.

413. Ayant eu 270 aunes de drap pour 6959 liv. 5 s., on demande combien on en aura de même qualité et même prix pour 695 liv. 18 s. 6 d.

270 aunes est la quantité de même nature que celle que je cherche; et il est évident qu'elle est plus grande que cette dernière; car on aura moins d'aunes pour 695 l. 18 s. 6 d., que pour 6959 l. 5 s. Donc (399):

6959 l. 5 s.	: 695 l. 18 s. 6 d.	:: 270 aun. : $x = 27$ aun.	
20	20		
139185	13918		
12	12		
1670220	: 167022		:: 270 aun. : $x = 27$ aun.

J'ai réduit d'abord les deux premiers termes en deniers (401), après quoi j'ai multiplié le troisième par le second, et divisé leur produit par le premier.

9ᵉ. EXEMPLE.

414. Ayant eu 545 marcs 7 onces 7 gros 1 den. 21 grains d'argent pour 36945 liv. 11 s. 6 den., on demande combien coûteront 327 marcs 3 onces 3 gros 0 den. 10 grains d'argent du même titre et au même prix.

36945 liv. 11 s. 6 den., prix des 545 marcs 7 onc. 7 gros 1 den. 21 grains est la quantité de même espèce que celle que je cherche; elle est aussi plus grande que cette dernière, qui ne doit être le prix que de 327 marcs 3 onces 3 gros 0 d. 10 grains. Donc (399):

545 m. 7 o. 7 g. 1 d. 21 g. : 327 m. 3 o. 3 g. o.d. 10 g. ::

8	8
4367	2619
8	8
34943	20955
3	3
104830	62865
24	24
419341	251470
209660.	125730.
2515941	1508770

:: 36945 l. 11 s. 6. : x

1508770

2586150
25861500
295560...
1847250.....
36945......

Pour 10 s.	754385	
Pour 1 s.	75438	10
Pour 6 d.	37719	5

5,574,275,192 l. 15 s.

OPÉRATION.

J'ai réduit les deux premiers termes en grains (401), après quoi j'ai multiplié le troisième par le second, et divisé leur produit par le premier terme. Le quatrième terme est fr. 22155 13 s. 6 d., dans lequel l'unité est 1 liv., comme dans le troisième terme (404).

10e. EXEMPLE.

415. Ayant eu 545 l. 5 onces 4 gros d'argent pour 30558 l. 10 s., on demande combien on en aura du même titre, au même prix, pour 168 liv.

Il est évident qu'on en aura moins pour 168 liv. que pour 30558 liv. 10 s.; qu'ainsi 545 marcs 5 onc. 4 gros, qui est la quantité de même espèce que celle que je cherche, est plus grande que cette dernière. Donc (399) :

30558 l. 10 s. : 168 l. :: 545 marcs 5 onc. 4 gros : $x =$ 3.

20	20
611170	3360

OPÉRATION.

J'ai réduit les deux premiers termes en sous (401), puis j'ai supprimé le zéro à droite de chacun des deux premiers termes. Après quoi j'ai multiplié le troisième par le second, et divisé leur produit par le premier, en observant que l'unité du produit et du quotient doit être 1 marc.

11e. EXEMPLE.

416. Ayant eu pour 9 deniers 1 liv. 1 once 3 gros de sel, on demande combien on en aura pour 1000 liv. ancien argent de France.

Il est évident qu'on aura pour 1000 liv. plus de sel que pour 9 den.; qu'ainsi 1 liv. 1 once 3 gros, qui est la quantité de même espèce que celle que je cherche, est plus petite que cette dernière. Donc (399) :

9 d. : 1000 liv. :: 1 liv. 1 once 3 grains : $x =$

20

20000

12

240000 d.

OPÉRATION.

Le premier terme, ayant pour unité 1 d., n'est qu'une fraction à l'égard du second, dans lequel l'unité principale est 1 liv., j'ai réduit alors le second terme en deniers; par ce moyen, les deux premiers termes ont la même unité sans que leur rapport ait changé (*a*). Après quoi j'ai multiplié le troisième par le second, et divisé leur produit par le premier terme, en observant que, dans le produit et le quotient, l'unité doit être la livre pondérale ou de poids.

On aurait pu abréger l'opération en prenant le tiers des deux premiers termes : on aurait eu

3 : 80000 :: 1 l. 1 once 3 gr. : $x =$ 28958 l. 5 onc. 2 gros 2 gr.

12e. EXEMPLE.

417. $\frac{3}{4}$ d'aune d'étoffe coûtant 18 fr., on demande combien coûteront $\frac{2}{3}$ d'aune de la même étoffe, au même prix.

$\frac{2}{3}$ d'aune sont moins que $\frac{3}{4}$ et coûteront moins; ainsi 18 f., qui est la quantité de même espèce que celle que je cherche, est plus grande que cette dernière. Donc (399):

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{3} :: 18 \text{ fr.} : x = 16 \text{ fr.}$$

3 4 2

9 : 8

1

OPÉRATION.

Pour réduire les deux premiers termes en deux nombres entiers, 1°. j'ai supprimé le dénominateur du premier et du second termes, ce qui est les multiplier chacun par son dénominateur (255); 2°. puis j'ai multiplié le premier terme par le dénominateur supprimé au second, et celui-ci par le dénominateur supprimé au premier (280) : j'ai eu par ce moyen, pour les deux termes du premier rapport 9 : 8, et pour la

(*a*) Voyez le second exemple du n°. (332).

proportion 9 : 8 :: 18 : x; 3°. après quoi j'ai pris le tiers sur le premier et le troisième terme, et j'ai 1 : 8 :: 2 : $x = 16$.

13ᵉ. EXEMPLE.

418. $\frac{2}{3}$ d'aune de ruban coûtant les $\frac{4}{5}$ d'un franc, on demande combien coûteront $\frac{3}{4}$ d'aune.

$\frac{3}{4}$ d'aune coûteront plus que $\frac{2}{3}$; ainsi $\frac{4}{5}$ de franc, qui est la quantité de même espèce que je cherche, est plus petite que cette dernière. Donc (399):

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} :: \frac{4}{5} \text{ de franc} : x = \frac{36}{40} = \frac{9}{10}$$

$$\begin{array}{l} 4 \quad 3 \\ \hline 8 : 9 :: \end{array}$$

OPÉRATION.

1°. J'ai supprimé le dénominateur du premier et du second termes; 2°. j'ai multiplié le premier terme par le dénominateur du second, et celui-ci par le dénominateur du premier; 3°. j'ai multiplié le troisième terme par le second (254), et divisé leur produit par le premier (277).

Observation.

419. Le troisième peut être aussi réduit en un nombre entier, en supprimant le dénominateur 5 (255), par lequel il faut après cela multiplier le premier terme (403); ainsi, après avoir réduit les deux premiers termes en deux nombres entiers, on a cette proportion 8 : 9 :: $\frac{4}{5}$: x.

Or, en supprimant au troisième terme le dénominateur 5 par lequel on multiplie ensuite le premier terme, on a celle-ci : 40 : 9 :: 4 : x; enfin, en prenant le quart du troisième et du premier terme (402), on a celle-ci : 10 : 9 :: 1 : $x = \frac{9}{10}$.

14ᵉ. EXEMPLE.

420. 7 aunes $\frac{5}{6}$ de drap ayant coûté 1504 liv., on demande combien coûteront 9 aunes $\frac{3}{4}$ du même drap, au même prix.

1504 liv. est le terme de même espèce que celui que je

cherche, et il est plus petit que celui que je cherche; car 9 aunes $\frac{3}{4}$ coûteront plus que 7 aunes $\frac{5}{6}$. Donc (399):

7 aun. $\frac{5}{6}$: 9 $\frac{3}{4}$ :: 1504 l. : x.

1°. J'ai réduit le premier et le second termes en fractions; savoir : le premier terme en sixièmes, et j'ai eu $\frac{47}{6}$; le second en quart, et j'ai eu $\frac{39}{4}$; 2°. j'ai supprimé le dénominateur du premier, et j'ai eu 47 entiers; et celui du second, et j'ai eu 39 entiers (255); 3°. j'ai multiplié le premier terme par 4, dénominateur du second, et ce dernier par 6, dénominateur du premier terme; 4°. après quoi j'ai multiplié le troisième terme par le second, et divisé leur produit par le premier.

Abréviation.

421. Au lieu de multiplier le premier terme par le dénominateur 4 du second, on peut indiquer ainsi cette multiplication 47×4; de même, au lieu de multiplier le second terme par le dénominateur 6 du premier, on peut indiquer ainsi cette multiplication 39×6. Cela posé : 1°. on peut prendre la moitié du facteur 4 et du facteur 6 de chacune de ces deux multiplications (337); on aura alors $47 \times 2 = 94$ pour premier terme, 39×3 pour le second terme, et 1504 pour troisième terme; 2°. on peut encore prendre la moitié du premier terme, c'est-à-dire, de 94, laquelle sera 47, et la moitié du troisième, c'est-à-dire, de 1504, laquelle sera 752; on aura alors cette proportion : 47 : 117 :: 752 : $x = 1872$ (404).

15°. EXEMPLE.

422. Ayant acheté du drap de $\frac{5}{4}$ de large, à raison de 48 liv. 10 s., on demande combien on doit payer proportionnellement du drap de même qualité qui n'a que $\frac{2}{3}$ de large.

48 liv. 10 s., qui est la quantité de même espèce que celle que je cherche, est plus grande que celle que je cherche; car le drap de $\frac{5}{4}$ vaut plus que celui qui n'a que $\frac{2}{3}$ de largeur. Donc (399):

	$\frac{5}{4} : \frac{7}{8} :: 48$ l. 10 s. : x
ou (417)	$40 : 28 :: 48$ l. 10 s. : x
ou encore	$10 : 7 :: 48$ l. 10 s. : x (421)
ou (421)	$5 : 7 :: 24$ l. 5 s. : x
ou (418)	$1 : 7 :: 4$ l. 17 s. : $x =$ 33 liv. 19 sous.

Observation.

423. On peut faire toutes les réductions sur le premier terme et sur l'un des deux autres, et réciproquement sur le second ou troisième terme et sur le premier, sans poser après chaque réduction une nouvelle proportion. Il suffit d'effacer, par un petit trait de plume les termes sur lesquels on a opéré des réductions quelconques, et de leur substituer au-dessous les quantités auxquelles ils se réduisent. De même, lorsque l'un des termes doit être multiplié par le dénominateur qu'on a supprimé à un autre terme, on peut placer au-dessous de ce terme le dénominateur par lequel il doit être multiplié, précédé du signe de la multiplication. Reprenons l'exemple ci-dessus, et figurons l'opération abrégée :

1°.	$\frac{5}{4}$	: $\frac{7}{8}$	:: 48 liv. 10 s. : x
2°.	8	4	
3°.	2	1	
4°.	1		24 liv. 5 s.
5°.	1		4 liv. 17 s.

1°. J'ai supprimé ou effacé, par un petit trait de plume les dénominateurs 4 et 8 (255);

2°. Pour rétablir le rapport, il faut ensuite multiplier le premier terme 5 par 8, que j'ai placé au-dessous de lui, pour indiquer la mutiplication à faire de 5 par 8, et il faut multiplier le second terme 7 par 4 que j'ai placé au-dessous, pour indiquer la multiplication à opérer (210) de 7 par 4 sans qu'il soit nécessaire que je la fasse;

3°. Ensuite, j'ai pris le quart de chacun des deux multi-

plicateurs 8 et 4 que j'ai effacés, et au-dessous desquels j'ai écrit le quart que j'en ai pris, qui est 2 et 1 (337);

4°. Après cela, j'ai pris la moitié de 2 qui est 1, et de 48 liv. 10 s. qui est 24 liv. 5 s., en observant d'effacer 2 ainsi que 48 liv. 10 s., et de placer, au-dessous de chacun de ces deux nombres, sa moitié ci-dessus indiquée;

5°. Après cela j'ai pris encore le cinquième du premier terme 5 que j'ai effacé, et du troisième, c'est-à-dire, de 24 l. 5 s. que j'ai effacés, et au-dessous duquel j'ai placé son cinquième, qui est 4 l. 17 s.

Par ce moyen j'ai les 3 termes réduits à leur plus simple expression, c'est-à-dire, les facteurs de mes 3 termes; et, en formant les produits de ces facteurs, j'ai les 3 termes eux-mêmes réduits à leur plus simple expression.

6°. Il faut ensuite multiplier le troisième terme par le second et diviser leur produit par le premier; ainsi dans l'opération ci-dessus, le premier terme se réduit à l'unité, le second à 7 : et le 3e. à 4 l. 17 s.; le résultat que je cherche ou le quatrième terme de ma proportion primitive sera donc le produit de 4 l. 17 s. par 7 = 33 l. 19 s.; car le 1er. terme étant 1 ou l'unité, ce produit 33 l. 19, divisé par l'unité, resterait le même (143).

16e. EXEMPLE.

424. Ayant fait faire une certaine quantité d'habits avec 1000 aunes de drap de $\frac{5}{4}$ de large, on demande combien il faudra d'aunes pour faire la même quantité d'habits avec du drap de $\frac{7}{8}$ de large?

1000 aunes est le terme de même nature que celui que je cherche, et il est plus petit que ce dernier, car il est évident qu'il faut plus de drap à mesure qu'il est moins large. Donc : (399).

$$\frac{7}{8} : \frac{5}{4} :: 1000 \text{ aun.} : x$$

1°. $\times 4 \quad \times 8$

2°. 1 2

3°. (421) $7 : 10 :: 1000 \text{ aun.} : x = 1428 \text{ aun.} \frac{4}{7}$.

1°. J'ai supprimé les dénominateurs, et j'ai placé celui du dividende sous le diviseur, et celui de ce dernier sous le dividende (421);

2°. J'ai pris le quart de 4 et de 8;

3°. J'ai multiplié 5 par 2, pour avoir le second terme de la proportion (421).

17[e]. EXEMPLE.

425. L'équipage d'un vaisseau ayant peu de vivres, et ayant à tenir la mer 30 jours, est borné à $\frac{3}{4}$ de ration par homme, quelle devrait être la ration proportionnellement ayant à tenir la mer 40 jours.

La ration que je connais est plus grande que celle que je cherche; car il est évident que cette dernière doit diminuer à mesure que le nombre des jours qu'on doit tenir la mer est plus grand (399). Donc:

$$40 \text{ j.} : 30 \text{ j.} :: \frac{3}{4} : x = \frac{9}{16}.$$

Opération. J'ai supprimé un zéro à chacun des deux premiers (378), puis j'ai multiplié le 3[e]. par le second terme et divisé le produit par le premier

18[e]. EXEMPLE.

426. 157 marcs 7 onces 7 gros 2 den. 21 gr. d'argenterie ont coûté 8215 l. 6 sous 1 den. $\frac{1345}{1536}$, on demande combien coûteront 240 marcs d'argenterie du même titre et au même prix?

8215 livres 6 sous 1 denier $\frac{1345}{1536}$ est la quantité de même espèce que celle que je cherche, et elle est plus petite que cette dernière; car il est évident que 240 marcs coû-

teront plus que 157 marcs 7 onces 7 gros 2 den. 21 grains. Donc (399) :

157 m. 7 . 7 . 2 . 21 : 240 m. :: 8215 l. 6 s. 1 d. $\frac{1345}{1536}$: x
ou 157 m. 7 . 7 . 2 . 21 : 8215 6 s. 1 d. $\frac{1345}{1536}$ :: 240 m. : x (389)
ou (378) 5824480 : 3028491073 :: 240 m. : x = 12879 liv.

On sait qu'on peut échanger les places des termes moyens, ce qui donne la seconde des proportions ci-dessus établies, laquelle est la même que la première. Cela posé :

1°. J'ai réduit le 1er. terme du premier rapport en parties de la plus petite espèce de toutes celles qui la composent, et j'ai aussi réduit le second terme en ses plus petites parties.

2°. J'ai indiqué sur le premier terme toutes les multiplications opérées sur le second, et sur ce dernier toutes celles opérées sur le premier.

3°. Après quoi j'ai pris des parties égales sur un des facteurs du premier et sur un des facteurs du second terme, autant de fois que je l'ai pu sans reste;

4°. J'ai formé le produit de tous les facteurs du 1er. terme, et le second s'est trouvé être 3028491073. En un mot, *il faut réduire les deux termes du premier rapport à leur plus petite et commune expression*, en opérant comme (337);

5°. Il faut ensuite multiplier le 3e. terme par le second et diviser leur produit par le 1er. terme, en observant que, dans le produit comme dans le quotient de l'opération finale, l'unité doit être 1 fr. comme dans le terme de même espèce que celui que l'on cherche.

Or les exemples de tout genre qui viennent d'être proposés sur la règle de trois n'offrent que différentes applications des principes des quatre règles fondamentales de l'arithmétique, et l'on a vu que, lorsque les trois termes d'une proportion sont complexes, on peut sans la détruire les réduire en nombres entiers (419).

Manière de réduire une proportion dont les trois termes sont des nombres complexes, à une proportion égale dont les trois termes connus sont des nombres entiers.

427. 1°. Réduisez les deux termes de même nature en parties d'un même dénominateur (413 et 414);

2°. Réduisez le terme de même nature que l'inconnu en parties d'un même dénominateur (192 et 243); supprimez le dénominateur (255), et multipliez le 1er. terme (403) par le dénominateur supprimé au troisième.

Par ce moyen la proportion restera la même et ses trois termes seront trois nombres entiers que vous pourrez réduire à une plus simple expression en prenant des parties égales sur le premier et sur l'un des deux autres (402) autant de fois que cela sera possible sans reste.

Mais observez que le terme de même espèce que l'inconnu ne doit être réduit en parties d'un même dénominateur, etc. que l'on supprime et par lequel il faut multiplier le premier terme (403), que dans le cas seulement où dans ce troisième terme les fractions qui accompagnent les entiers rendraient difficile la multiplication des deux termes moyens.

Lorsque ces fractions sont, au contraire, telles qu'on puisse opérer sans difficulté la multiplication des termes moyens par les parties aliquotes, il faut se borner à réduire les deux termes de même nature à leur plus petite et commune expression.

Comme on le voit, le cas le plus compliqué que puisse présenter l'opération par laquelle on trouve le quatrième terme d'une règle de trois, est celui dans lequel les deux termes moyens dont il s'agit de former le produit sont deux nombres complexes, ainsi que le premier terme par lequel on doit diviser le produit des deux moyens. Or, il est évident qu'on pourrait appliquer à l'opération par laquelle on doit trouver le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers termes sont des nombres complexes, les principes de la multiplication et division

complexes. D'un autre côté, il est évident qu'en réduisant les deux premiers termes en parties d'un même dénominateur, on ne change rien à leur rapport ou quotient (401); enfin que, réduire après cela le terme de même espèce que l'inconnu en parties d'un même dénominateur, que l'on supprime, c'est multiplier ce terme et par conséquent le produit des moyens ou le dividende par ce même dénominateur (255). Mais que, comme le premier terme doit être aussi multiplié par les dénominateurs supprimés au terme de même espèce que l'inconnu, le quotient ou le quatrième terme que l'on cherche reste le même. Plus brièvement :

428. Les deux termes moyens ne sont que des facteurs d'un dividende, le premier terme n'est qu'un diviseur, et le quatrième terme que l'on cherche n'est qu'un quotient : or il est évident que ce quotient reste le même, lorsqu'on multiplie ou divise le premier terme par les mêmes nombres par lesquels on a multiplié ou divisé le second et le troisième termes.

Lorsqu'on a bien appris les quatre premières règles, l'opération arithmétique relative à la règle de trois ne peut donc rien présenter que l'on ne sache déjà ; et, s'il a été insisté sur les opérations arithmétiques que la règle de trois présente, c'est uniquement pour convaincre les élèves moins laborieux que les principes des quatre premières règles de l'arithmétique comprennent tout ce qu'il est important que l'on connaisse, pour opérer dans tous les cas possibles une règle de trois sans nulle difficulté.

Nous prévenons donc ici que nous n'expliquerons plus les détails de l'opération arithmétique.

EXEMPLES

Pour s'exercer à considérer dans trois quantités données les différens rapports qu'elles présentent, et les diverses questions auxquelles ces rapports peuvent donner lieu.

429. Pour augmenter l'utilité des exemples de cette nature, nous proposerons ceux dont on peut faire de fréquentes

applications aux usages du commerce, tels que ceux qui sont relatifs au calcul de l'*escompte*, de la *tare*, des *primes d'assurances*, des *commissions*, des *pertes* et *bénéfices*, etc.

Dans toutes les questions que l'on peut proposer sur l'escompte, le taux de l'escompte est fixé à 2, 3, 4 ou 5 f., etc., d'escompte sur un capital de 100 fr.;

Le taux de la tare à 2, 3, 4 ou 5 l. de tare sur 100 liv., poids brut;

De même le prix de l'assurance ou de la commission, ou le taux de la perte et du bénéfice, est déterminé à 2, 3, 4 ou 5 fr., etc., sur un capital de 100 fr.

Par ce moyen, toutes les questions relatives à ces divers objets se réduisent à déterminer l'escompte, la tare, l'assurance, etc., d'un capital ou d'un poids brut, etc. quelconques, en raison de 2, 3, 4 ou 5, etc., pour 100.

On a fixé le taux de l'escompte ou de la tare, etc., sur un capital de fr. 100 ou sur 100 livres pesant, etc., par la raison que le nombre 100, étant diviseur ou multiplicateur, donne lieu à faire l'application des abréviations indiquées dans les développemens des principes de la numération (44) et (45).

Comme ce qu'on entend par escompte, tare, etc., n'est pas connu des personnes étrangères au commerce, nous allons traiter succinctement de chacun de ces objets en particulier, et proposer les questions arithmétiques auxquelles chacun d'eux peut donner lieu.

De l'escompte (a) *et des diverses questions qui résultent de la manière dont on en détermine le taux.*

430. L'escompte est un rabais accordé sur une somme que l'on veut recevoir avant l'époque fixée pour son paiement.

(a) Toutes les questions relatives à l'escompte ne sont que des applications de la règle de trois. Il n'en est traité ici en particulier qu'en faveur des personnes qui se destinent au commerce, et qui en ignorent les usages les plus fréquens.

Ou encore c'est ce que le prêteur exige pour le prix de la jouissance de la somme qu'on lui emprunte.

431. On détermine l'escompte d'une année en raison de 3, 4 ou 5 fr., etc., pour 100 fr., celui d'un mois en raison de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2}$ fr., etc., pour 100 fr.

Notre objet est encore de faire connaître les diverses questions qu'on peut proposer sur l'escompte, et les rapports qui résultent de la manière dont on en détermine le taux.

L'escompte étant fixé à 4 fr. pour 100 fr., par exemple, lorsque le prêteur soustrait, des 100 fr. qu'on lui emprunte, les 4 fr. d'escompte et les retient, il ne donne en argent que 96 fr., et doit recevoir à l'époque convenue 100 fr., ou se fait faire un billet de pareille somme.

L'escompte ainsi prélevé est celui que nous appellerons *en dehors*, parce qu'il est soustrait du capital emprunté; il en résulte les rapports suivans.

432. *Escompte à 4 pour $\frac{0}{0}$ en dehors.*

Billet ou capital emprunté . . .	100 fr.
Escompte soustrait	4 fr.
Argent ou produit net du billet.	96 fr.

Sur ces bases, il est évident que :

1°. Le billet est à son escompte.	::	100 bill. :	4 esc.
2°. L'escompte au billet.	::	4 esc. :	100 bill.
3°. L'argent à l'escompte.	::	96 arg. :	4 esc.
4°. L'escompte à l'argent	::	4 esc. :	96 arg.
5°. Le billet à son produit net en argent	::	100 bill. :	96 arg.
6°. L'argent au billet dont il est le prix	::	96 arg. :	100 bill.

En un mot, il est évident que le taux quelconque de l'escompte étant connu, tous les rapports ci-dessus en résultent. Lorsqu'on a su s'en former une idée exacte, les questions que l'on peut proposer sur l'escompte ne peuvent plus présenter de difficultés.

Questions sur l'escompte en dehors.

433. 1°. Quel est l'escompte d'un billet de 6000 fr. à 4 pour $\frac{0}{0}$?

L'escompte 4 est le terme de même nature que celui que je cherche, et il est évident qu'il est plus petit que ce dernier, dans le même rapport qu'un billet de 100 fr. est plus petit que celui de 6000 fr. Donc (399) :

$$100 : 6000 :: \quad 4 : x = 240$$

ou (389) $100 : \quad 4 :: 6000 : x = 240$

Nota. A l'avenir nous établirons toutes les proportions de ce genre dans le même sens que la dernière, et nous ne l'établirons pas au-dessous de chaque question. On renverra dorénavant au lieu où elle est établie ; par ce moyen les élèves poseront les règles avant de les voir dans le présent ouvrage, qu'ils pourront consulter ensuite seulement pour s'assurer qu'ils ont bien appliqué les principes. Voyez l'opération (496) ;

434. 2°. On veut gagner 240 fr. d'escompte, à raison de 4 pour 100 ; quel est le montant du billet qu'on doit prendre pour gagner exactement cette somme ?

Un billet de 100 fr. est le terme de même nature que celui que je cherche, et il est évident qu'il est plus petit que ce dernier, dans le même rapport que l'escompte 4 est plus petit que l'escompte 240 au même taux. Donc (399), opération (499);

435. 3°. Quel est l'escompte d'une somme d'argent de 5760 fr. prêtée à l'escompte de 4 pour 100 ?

4 est le terme de même nature que celui que je cherche, et il est plus petit que ce dernier, comme 96 fr. en argent, qui est le terme de même nature que 5760 fr., est plus petit que celui-ci (432). Donc (399), opération (498) ;

436. 4°. On veut gagner 240 fr. d'escompte à raison de 4 pour 100, combien doit-on prêter en argent comptant pour gagner exactement cette somme ?

96 fr. en argent (432) est le terme de même nature que celui que je cherche, et il est plus petit que celui-ci, dans le même rapport que l'escompte 4 qui provient de 96 en argent, est plus petit que l'escompte 240 fr. Donc (399), opération (500);

437. 5°. On demande combien on aura à donner en argent d'un billet de 6000 fr., en retenant l'escompte à 4 pour 100?

96 fr. en argent est le terme de même nature que celui que je cherche, et il est plus petit que celui-ci, comme un billet de 100 f. est plus petit que celui de 6000 f. Donc (399), opération (501);

438. 6°. Quel billet dois-je faire en y ajoutant l'escompte pour une somme de 5760 fr. qu'on me prête en argent, à l'escompte de 4 pour 100?

Un billet de 100 fr. est le terme de même nature que celui que je cherche, et il est plus petit que celui-ci, comme 96 fr. en argent est un nombre plus petit que 5760 fr. en argent. Donc (399), opération (502).

De l'escompte en dedans.

439. On le calcule suivant les bases suivantes :

Lorsque l'escompte est à 4 pour 100, par exemple, le capitaliste donne en entier en argent les 100 fr. qu'on lui emprunte, et reçoit au terme convenu 104 fr., ou fait souscrire par son débiteur un billet de 104 fr., payable à ce même terme.

Ainsi, dans cette manière de prendre l'escompte, le montant est ajouté à celui du capital emprunté, et on le comprend dans le billet souscrit par le débiteur, ce qui élève à 104 fr. le billet qu'il fait pour 100 fr. qu'on lui prête en argent.

Il ne faut donc pas perdre de vue que 4 est l'escompte que perd un billet de 104 fr., et que gagne une somme d'argent de 100 fr.

L'escompte ainsi prélevé est celui que nous appellerons *en dedans*, parce que le billet renferme l'escompte en outre du capital emprunté.

Il en résulte les rapports suivans :

440. *Escompte à 5 pour 100 en dedans.*

Argent ou capital emprunté. . . .	100 f.
Escompte ajouté	5 f.
	105 f.

Sur ces bases, il est évident que :

1°.	Le billet est à son escompte.	::	105 bill.	:	5 esc.
2°.	L'escompte au billet. . . .	::	5 esc.	:	105 bill.
3°.	L'argent à l'escompte . . .	::	100 arg.	:	5 esc.
4°.	L'escompte à l'argent. . .	::	5 esc.	:	100 arg.
5°.	Le billet à l'argent. . . .	::	105 bill.	:	100 arg.
6°.	L'argent au billet	::	100 arg.	:	105 bill.

En un mot, il est évident que le taux de l'escompte en dedans étant connu, tous les rapports ci-dessus en résultent.

Lorsqu'on a su s'en former une idée exacte, toutes les questions que l'on peut proposer sur l'escompte en dedans ne peuvent plus présenter de difficulté.

Questions sur l'escompte en dedans.

441. 1°. Quel est l'escompte d'un billet de 6300 f. à raison de 5 pour $\frac{0}{0}$ en dedans ? Opération (503).

Nota. On peut appliquer au présent exemple et aux suivans le même raisonnement qu'à ceux proposés sur l'escompte en dehors. La différence consiste uniquement en ce que le rapport du billet ou de l'argent à l'escompte est de 105 à 5, ou de 100 à 105 en dedans, tandis qu'en dehors le rapport est de 100 bill. à 5 esc., ou de 95 argent à 100 fr. billet.

442. 2°. Quel est l'escompte d'une somme de 6000 fr. en argent à 5 pour $\frac{0}{0}$ en dedans ? Opération (505).

443. 3°. Quelle somme d'argent faut-il prêter pour gagner 300 liv. d'escompte à 5 pour $\frac{0}{0}$ en dedans?

Il faut prêter 100 liv. en argent pour gagner 5 d'escompte; la somme d'argent qu'il faut prêter pour gagner 300 liv. doit être plus grande: donc (399); opération (507).

444. 4°. Quel est le montant du billet qu'il faut prendre pour gagner 300 fr. d'escompte à 5 pour $\frac{0}{0}$ en dedans?

Il faut prendre un billet de 105 liv. pour gagner 5, le billet qu'il faut prendre pour gagner 300 liv. doit être plus grand en proportion. Donc (399). *Opération* (508).

445. 5°. Que doit-on donner en argent d'un billet de 6300 liv. en retenant l'escompte à 5 pour $\frac{0}{0}$, en dedans?

Il faut donner 100 liv. en argent d'un billet de 105 liv.; la somme qu'il faut donner en argent d'un billet de 6300 liv. doit être plus grande à proportion. Donc (509).

446. 6°. Quel billet le débiteur doit-il faire pour une somme d'argent de 6000 liv. qu'on lui prête à 5 p. $\frac{0}{0}$ d'escompte en dedans?

Pour 100 liv. en argent il doit faire un billet de 105 liv; or ce billet est plus petit que celui qu'il doit faire pour 6000 liv. d'argent. Donc (510).

Toutes ces questions sont exactement les mêmes que celles relatives à l'escompte en dehors. Il n'y a que les rapports de l'escompte à l'argent et réciproquement, qui soient différens dans ces deux cas (441).

447. Ce qui distingue essentiellement l'escompte en dedans de l'escompte en dehors, c'est que l'escompte est ajouté aux 100 fr. empruntés dans l'escompte en dedans, et qu'il en est soustrait dans l'escompte en dehors.

Toutes les fois que l'escompte sera en dedans, la question en avertira; autrement il sera toujours entendu en dehors.

De la tare.

448. La tare est un rabais que fait à l'acheteur celui qui vend au poids une marchandise qui n'est pas séparée de l'enveloppe dans laquelle elle est contenue, ou qui a été pesée avec son enveloppe.

Le poids de la marchandise et de l'enveloppe qui la contient est ce que les négocians appellent le poids *ort* ou *brut*; le rabais de 2, 3, 4 ou 5, etc., qu'ils accordent sur 100 livres poids brut, est ce qu'ils appellent la tare, qui n'est autre chose que l'estimation du poids de l'enveloppe en particulier.

Cette estimation à tant pour $\frac{0}{0}$ a pour objet d'éviter de peser séparément les marchandises et l'enveloppe, ce qui serait coûteux et difficile, ou sujet à occasioner une perte dans bien des cas. Le poids de la marchandise, après qu'on en a soustrait celui de la tare, est ce que les négocians appellent le *poids net*.

449. *La tare étant à 4 p. $\frac{0}{0}$ par exemple*,

d'un poids brut de	100 liv.
ôtant pour la tare	4 liv.
reste poids net	96 liv.

450. L'énoncé de toutes les questions relatives à la tare renferme donc toujours; 1°. un poids brut connu qui est toujours fixé à 100 liv.; 2°. la tare qui doit en être soustraite; 3°. un poids net connu, etc. (449).

Toutes les questions que l'on peut proposer sur la tare sont les mêmes que celles que nous avons déjà proposées sur l'escompte en dehors; il n'y a de différence qu'en ce que le nombre 100, au lieu d'exprimer le montant d'un billet, exprime celui d'un poids brut; que 4, au lieu d'exprimer le montant du taux de l'escompte, exprime celui de la tare; et que 96, au lieu d'exprimer le produit net d'un billet de 100 liv. dont on a retenu l'escompte, exprime le poids net

auquel se réduisent 100 liv. poids brut de marchandises (*a*).

Questions sur la tare.

451. 1°. Quelle est la tare de 6000 liv. poids brut à raison de 4 liv. de tare pour 100 liv. poids brut, ou, plus brièvement, à 4 p. %? Rép. (496).

452. 2°. Ayant eu 240 liv. de tare sur 6000 liv. poids brut, on demande quelle serait la tare à proportion d'un poids brut de 100 liv.; ou, en d'autres termes, combien cela donne de tare p. %; ou, plus brièvement encore, le taux de la tare (*b*)? Rép. (497).

453. 3°. Quelle est la tare d'un poids net de 5760 liv. dont la tare a été soustraite à 4 p. %? Rép. (498).

454. 4°. Ayant eu 240 liv. de tare sur des marchandises, et leur poids se trouvant réduit à 5760 liv. poids net après qu'on a retenu ladite tare au taux convenu, on demande quel est le taux de la tare (*c*)? Rép. (197).

455. 5°. On a eu 240 liv. de tare à raison de 4 pour %

(*a*) On ne propose des opérations sur la tare, qu'afin que les élèves puissent apercevoir leur parfaite analogie avec celle sur l'escompte en dehors. Pour résoudre chaque problème proposé sur la tare, ils n'auront qu'à répéter le raisonnement qui a déjà été fait pour résoudre le même problème proposé sur l'escompte en dehors. Il n'y a rien à changer à ce raisonnement que les mots relatifs à l'escompte, qu'il faut traduire par les mots correspondans relatifs à la tare. Il en est de même des questions proposées sur les primes d'assurances, les commissions, les pertes, etc.; celles sur les bénéfices et les commissions d'achats où de paiemens doivent être résolues comme celles sur l'escompte en dedans.

(*b*) *Le taux de la tare :* puisque la tare est toujours fixée à 1, 2, 3, 4 ou 5, sur 100 l. poids brut, il est évident que, chercher le taux de la tare, c'est chercher la tare d'un poids brut de 100 liv.

(*c*) Chercher le taux de la tare, c'est chercher quelle est la tare d'un poids brut de 100 l. Or, puisque le poids net 5760 liv., plus les 240 l.

sur certaines marchandises, on demande quel en était le poids brut? Rép. (499).

456. 6°. On a eu 240 liv. de tare à raison de 4 p. $\frac{0}{0}$ sur certaines marchandises : on demande quel en était le poids net? Rép. (500).

457. 7°. On demande quel est le poids net de 6000 liv. de marchandises poids brut, la tare étant fixée à 4 pour $\frac{0}{0}$? Rép. (501).

458. 8°. On demande quel est le poids brut d'une marchandise qui pèse 5760 liv. poids net, la tare étant fixée à 4 p. $\frac{0}{0}$? Rép. (502).

Des primes d'assurance.

459. La somme qu'un marchand, qui veut faire assurer sa marchandise, paye à l'assureur pour prix de l'assurance, est ce que les négocians appellent *prime d'assurance.*

On la règle toujours à 1, 2, 3 ou 4, etc., pour 100 liv.

460. La prime étant fixée à 4 liv. p. $\frac{0}{0}$.

sur une somme assurée de	100 l.
l'assureur prélevant une prime de	4 l.
ne perdra en cas de naufrage que	96 l.

Toutes les questions à proposer sur les primes d'assurance sont encore les mêmes que celles sur l'escompte en dehors.

461. 1°. Quelle est la prime d'assurance d'une somme de 6000 liv. assurée à 4 p. $\frac{0}{0}$? Rép. (596).

462. 2°. Ayant eu 240 liv. de prime sur une somme de

---

de tare retenues sur le poids brut, recomposent évidemment ce dernier, il est évident qu'en ajoutant les 240 liv. de tare aux 5760 liv. poids net, on aura 6000 liv. pour le poids brut, dont la tare 240 liv. est connue, et que la question se réduit à chercher quelle est à proportion la tare d'un poids brut de 100 liv., ce qui ramène cette question à celle du numéro (452).

6000 liv., on demande quelle est en proportion la prime de 100 liv.? Rép. (597).

463. 3°. Ayant reçu des assureurs 5760 liv. pour le produit net dont les assureurs ont retenu la prime à 4 pour %, on demande quel est le montant de la prime qu'ils ont retenue? Rép. (598).

464. 4°. Ayant eu 5760 liv. pour le produit d'une somme sur laquelle la prime retenue au taux convenu s'est élevée à 240 liv., on demande quel était le taux de la prime (*a*)? Rép. (597).

465. 5°. On veut gagner une prime de 240 l. à 4 pour % quel est le montant de la somme qu'il faut assurer pour gagner exactement cette prime? Rép. (599).

466. 6°. On veut gagner une prime de 240 liv. à 4 p. % quelle perte (*b*) doit-on risquer pour gagner exactement cette prime? Rép. (540).

467. 7°. On demande à combien s'élève pour les assureurs la perte d'une somme de 6000 liv. qu'ils ont assurée à 4 p. % (*c*)? Rép. (541).

468. 8°. On demande quelle est la somme qu'il faut faire

(*a*) Chercher le taux de la prime qui se règle toujours à 1, 2 ou 3, etc., pour 100, c'est chercher la prime de l'assurance faite sur une somme de 100 l. Pour trouver le taux de la prime, il faudrait donc connaître quelle est la somme assurée qui, prime déduite, a donné pour produit net 5760 liv. Or, on aura cette somme assurée en ajoutant, aux 5760 liv. qui en sont le produit net, les 240 liv. de prime retenues pour les assureurs; on aura donc 6000 liv. pour la somme assurée sur laquelle on a retenu 240 liv. de prime, et la question se réduit à chercher quelle doit être en proportion la prime de 100 liv. (462).

(*b*) *Perte:* sur 100 liv. assurées à 4 pour 100, l'assureur ne risque de perdre que 96 liv., puisqu'il gagne 4 liv. de prime sur les 100 liv. assurées.

(*c*) Sur 100 liv. assurées à 4 pour 100, la perte des assureurs se réduit à 96 liv. Celle de 6000 liv. doit être proportionnée.

assurer pour recevoir 5760 liv. des assureurs, déduction faite de leur prime à 4 p. $\frac{0}{0}$?

Pour recevoir 96 livres des assureurs, il faudrait faire assurer 100 liv.; il faudrait faire assurer une plus grande somme d'argent pour recevoir de ces mêmes assureurs, 5760 l. Donc, rép. (542).

Des commissions.

469. On entend ici par commission la rétribution qu'un individu quelconque accorde à un négociant pour une vente ou un achat, ou pour des paiemens ou recouvremens qu'il a chargé ce négociant de faire pour son compte.

La commission se règle toujours à $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3, ou 4, etc., pour $\frac{0}{0}$.

470. Celui qui fait une vente ou des recouvremens dont il a été chargé par son commettant, retient sa commission sur le montant des ventes qu'il a faites, ou sur celui des fonds qui lui ont été envoyés : ainsi sur une vente de 100 liv., la commission étant à 2 p. $\frac{0}{0}$, il retient 2 liv. et ne rend au propriétaire que 98 liv.; ou sur une remise (*a*) ou un recouvrement (*b*) de 100 liv., la commission étant à $\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$, il retient ce $\frac{1}{2}$, et ne paye pour compte de son commettant (*c*) ou ne lui rembourse que 99 liv. $\frac{1}{2}$.

D'où il suit qu'en général :

(*a*) *Remise :* Une lettre de change qu'un négociant envoie à un autre, pour que ce dernier en reçoive le montant, est ce que les négocians appellent une remise. Cette même lettre, considérée relativement à celui sur qui elle est tirée, ou qui doit la payer, est ce que les négocians appellent une traite.

(*b*) *Recouvrement :* ce sont les sommes qu'un particulier reçoit en paiement de celles qui lui sont dues personnellement, ou qui sont dues à d'autres particuliers qui l'ont chargé de les recevoir.

(*c*) *Commettant :* c'est le nom par lequel les négocians désignent ceux qui les commettent pour une opération quelconque, ou qui les chargent d'une opération quelconque.

471. On calcule la commission due sur des ventes, des recouvremens ou des remises, comme l'escompte en dehors, parce qu'elle doit être soustraite de 100 liv. (470).

472. Il n'en est pas de même de la commission qui est due à celui qui a fait un achat de marchandises ou qui a fait des paiemens pour compte d'autrui : car il est évident que la commission d'un achat étant fixée à 2 p. $\frac{0}{0}$, il est dû 102 livres à celui qui a opéré un rachat de 100 l., c'est-à-dire, qu'il lui est dû le débours de 100 liv, plus les deux liv. de commission qu'il doit gagner ; ou que la commission étant fixée à $\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$, il revient 100 liv. $\frac{1}{2}$ à celui qui a déboursé 100 liv. ; qu'ainsi à raison de deux pour 100 de commission il se fera rembourser 102 liv., ou qu'à raison de 100 $\frac{1}{2}$ pour un débours de 100 liv. il se fera rembourser 100 $\frac{1}{2}$; d'où il suit qu'en général :

473. On calcule la commission due sur un achat, ou sur des débours faits pour compte d'autrui, comme l'escompte en dedans (440), parce qu'elle doit être ajoutée à 100 l. (474).

474. 1°. Quelle est la commission à raison de 4 p. $\frac{0}{0}$, d'une vente de 6000 ? Rép. (496).

Quelle est celle d'un achat de pareille somme à 5 p. $\frac{0}{0}$? Rép. (505).

475. 2°. Ayant eu 240 liv. de commission sur une vente de 6000 liv., on demande le taux de la commission? Rép. (497).

Ayant eu 300 liv. de commission sur un achat de 6000 liv., on demande quel est le taux de la commission? Rép. (506).

476. 3°. Quel est le montant de la vente qu'il faudrait faire pour gagner 240 liv. de commission à 4 pour $\frac{0}{0}$? Rép. (499).

Quel est le montant de l'achat qu'il faudrait faire pour gagner 300 liv. de commission à raison de 5 pour $\frac{0}{0}$? Rép. (507).

477. 4°. Ayant gagné 240 l. de commission sur une vente

de marchandises faite à 4 p. $\frac{0}{0}$, on demande pour combien on en a vendu? Rép. (499).

Ayant gagné 300 livres de commission, à raison de 5 p. $\frac{0}{0}$, sur un achat de marchandises, on demande quel est le montant de cet achat? Rép. (507).

478. 5°. Ayant vendu pour 6000 l. de marchandises dont on doit retenir la commission à 4 p. $\frac{0}{0}$, on demande combien il revient à celui à qui elles appartiennent? Rép (501).

Ayant acheté pour 6000 liv. de marchandises, sur le montant desquelles on doit gagner une commission de 5 p. $\frac{0}{0}$, on demande combien il revient à celui qui les a achetées? Rép. (510).

479. 6°. Ayant compté 5760 liv. à une personne pour le produit net des marchandises qu'on a vendues pour son compte, et dont on a retenu la commission à 4 pour $\frac{0}{0}$, on demande à combien s'élevait la vente des marchandises Rép. (502).

Ayant reçu 6300 liv. pour le montant des marchandises achetées pour compte d'une tierce personne, y compris la commission à 5 p. $\frac{0}{0}$, on demande quel était le montant de l'achat? Rép. (509).

480. 7°. Ayant reçu 5760 liv. pour produit net des marchandises sur lesquelles le vendeur a retenu 240 liv. pour la commission, on demande le taux de la commission (*a*)? Rép. (497).

481. 8°. Un négociant qui a recouvré 6000 liv. pour un de ses commettans, et qui doit retenir sa commission à $\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$, demande combien il revient à son commettant?

(*a*) Chercher le taux de la commission, c'est chercher quelle est la commission d'une vente de 100 livres, à proportion de la vente plus considérable qui a produit une commission de 240 liv. Or, on aura le montant de la vente qui a produit une commission de 240 liv., en ajoutant cette somme aux 5760 liv. qui sont le produit net de cette même vente. On aura donc 6000 liv. pour le montant de la vente, et la question se réduit à celle du numéro (475).

$$100 : 99\tfrac{1}{2} :: 6000 : x \ (470).$$

482. 9°. Un négociant ayant déboursé 6000 liv. pour un de ses commettans, demande combien il doit se faire rembourser par ce dernier, y compris sa commission à $\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$?

$$100 : 100\tfrac{1}{2} :: 6000 : x \ (472).$$

Des pertes et bénéfices.

483. On calcule toujours la perte et le bénéfice d'une opération à 1, 2, 3, etc, p. $\frac{0}{0}$.

La perte doit être soustraite d'une opération de 100 liv. Ainsi, à 4 p. $\frac{0}{0}$ de perte, 100 liv. se réduisent à 96 liv. Par exemple un achat de 100 liv. ne produira à la vente que 96 liv. (*a*).

Le bénéfice doit être ajouté à 100 liv. Ainsi, à 4 pour $\frac{0}{0}$ de bénéfice, 100 liv. s'élèvent à 104 liv. Par ex., un achat de 100 liv. produira à la vente 104 liv (*b*).

484. 1°. Quel est le montant de la perte que l'on fera sur un achat de 6000 liv. de marchandises vendues à 4 p. $\frac{0}{0}$ de perte? Rép. (496).

485. 2°. Quel est le montant de la perte que l'on fera sur une vente de 5760 livres, à raison de 4 p. $\frac{0}{0}$ de perte? Rép. (498).

486. 3°. Quel est le montant du benéfice que l'on fera sur une vente de 6300 livres à raison de 5 p. $\frac{0}{0}$ de bénéfice? Rép. (503).

487. Quel est le bénéfice au même taux d'un achat de 6000? Rép. (505).

(*a*) Il ne faut pas confondre le produit d'une vente faite à perte avec le montant de l'achat; c'est en quoi consiste toute la difficulté des questions relatives aux achats et aux ventes.

(*b*) Il ne faut pas confondre le montant d'une vente à bénéfice avec celui de l'achat.

488. 4°. Quel est le montant de la vente qu'il faut faire pour ne perdre que 240 liv. à raison de 4 p. % de perte? Rép. (500).

489. 5°. Quel est le montant de la vente qu'il faut faire pour gâgner 300 liv., à raison de 5 p. %? Rép. (508).

490. 6°. Quel est le prix coûtant des marchandises qu'on a vendues 5760 liv., à raison de 4 p. % de perte? Rép. (502).

491. 7°. Quel est celui des marchandises qu'on a vendues 6300 liv. à 5 p. % de bénéfice? Rép. (509).

492. 8°. Ayant acheté pour 6000 liv. de marchandises, combien les vendra-t-on à 4 p. % de perte? Rép. (501).

493. 9°. Ayant acheté pour 6000 liv. de marchandises, combien les vendra-t-on à 5 pour % de bénéfice? Rép. (510).

494. 10°. On a donné pour 5760 liv. des marchandises qui ont coûté 6000 liv.: combien a-t-on perdu pour %? (*a*) Rép. (497).

495. 11°. On a vendu 6300 liv. des marchandises qui ne coûtaient que 6000 liv., combien a-t-on gagné p. %? (*b*) Rép. (506).

Toutes ces questions sont les mêmes que les précédentes sur l'escompte en dedans ou en dehors sur la tare, etc., parce qu'elles sont toutes relatives à 1, 2, 3, etc. % d'augmentation ou de diminution.

(*a*) En ôtant 5760 des 6000 liv. que coûtent les marchandises dont s'agit, la différence de 240 indique la perte qu'on a faite sur 6000 liv., et la question est réduite à chercher quelle doit être à proportion la perte d'un achat de 100 liv.

(*b*) Il est évident qu'en vendant 6300 l. ce qui coûte 6000, on a gagné 300 liv. sur un achat de 6000 liv., et qu'ainsi la question se réduit à chercher combien on a gagné à proportion sur un achat de 100 liv.

Solution de tous les problèmes que l'on peut proposer sur l'escompte en dedans et en dehors, sur la tare, sur les primes d'assurances, les commissions, les pertes et les bénéfices (a).

496.	PROBLÈME.	100 : 6000 :: 4 : x = 240.
497.	PROBLÈME.	6000 : 100 :: 240 : x = 4.
498.	PROBLÈME.	96 : 5760 :: 4 : x = 240.
499.	PROBLÈME.	4 : 240 :: 100 : x = 6000.
500.	PROBLÈME.	4 : 240 :: 96 : x = 5760.
501.	PROBLÈME.	100 : 6000 :: 96 : x = 5760.
502.	PROBLÈME.	96 : 5760 :: 100 : x = 6000.
503.	PROBLÈME.	105 : 6300 :: 5 : x = 300.
504.	PROBLÈME.	6300 : 105 :: 300 : x = 5.
505.	PROBLÈME.	100 : 6000 :: 5 : x = 300.
506.	PROBLÈME.	6000 : 100 :: 300 : x = 5.
507.	PROBLÈME.	5 : 300 :: 100 : x = 6000.
508.	PROBLÈME.	5 : 300 :: 105 : x = 6300.
509.	PROBLÈME.	105 : 6300 :: 100 : x = 6000.
510.	PROBLÈME.	100 : 6000 :: 105 : x = 6300.

De l'avarie.

511. L'avarie est un dommage arrivé à un vaisseau, ou aux marchandises dont il est chargé, ou une diminution de de leur produit causée par des dépenses extraordinaires et forcées pendant des relâches, etc.

Le dommage est supporté par les co-intéressés ou les assureurs, pour le leur distribuer. On règle l'avarie de cent livres en proportion de celle que le capital entier du vaisseau ou des marchandises a souffert, ce qui la fixe à 1, 2, 3 ou 4, etc.,

(a) Les proportions ci-dessus établies sont celles relatives à tous les problèmes proposés sur l'escompte, la tare, etc. On les a placées ici, afin que les élèves puissent établir la proportion relative à chaque problème, sans être guidés autrement que par le principe, et vérifier ensuite (avec les proportions ci-dessus) s'ils ont bien opéré.

p. $\frac{0}{0}$, et ensuite on prend 1, 2, 3 ou 4, etc., pour $\frac{0}{0}$ de la somme assurée par chaque assureur, ou fournie par chaque intéressé.

C'est la même opération que pour déterminer ce qui revient à chaque créancier d'un failli, à raison de 1, 2, 3 ou 25 p. $\frac{0}{0}$, etc.

EXEMPLE.

512. Un navire estimé 800000 liv. avec sa cargaison a fait pour 80000 liv. d'avaries : on demande combien chaque propriétaire ou chaque assureur perdra p. $\frac{0}{0}$, etc.

$$800000 : 80000 :: 100 : x = 10.$$

(402) $$10 : 1 :: 100 : x = 10.$$

Chaque intéressé perdra 10 p. $\frac{0}{0}$; et, pour déterminer la perte de chacun, il faut faire pour chacun une règle de trois qui aura 100 pour premier terme, 10 pour second ; et la mise de l'un des intéressés pour troisième terme.

De l'intérêt.

513. L'intérêt est le profit que l'on retire de l'argent que l'on prête.

On le calcule à 1, 2, 3 ou 4 p. $\frac{0}{0}$, etc, ou au denier 20, 25, ce qui signifie 1 d. d'intérêt sur 20 ou sur 25, que l'on prête.

La loi n'admet aucune demande d'intérêt de l'intérêt. Ainsi l'intérêt peut être distingué, par les arithméticiens, de l'escompte, en ce qu'on calcule le plus souvent ce dernier en dehors, tandis que l'intérêt légal doit toujours être calculé en dedans.

Tout ce qui est dit d'ailleurs de l'escompte en dedans est applicable à l'intérêt, ainsi que les questions proposées sur l'escompte en dedans.

1er. PROBLÈME.

514. Quel est l'intérêt d'une somme d'argent ou d'un capital de 42371 liv. 1 s. 8 den. prêté au denier 20; ou, en d'autres termes, à 5 p. % par an *(a)*, pour 15 ans 9 mois et 6 jours?

Il faut d'abord chercher à combien monte l'intérêt de 42371 liv. 1 s. 8 den. pour un an; et il faut ensuite multiplier l'intérêt d'un an par 15 ans 9 mois et six jours, pour avoir l'intérêt de quinze ans 9 mois et 6 jours.

Pour avoir l'intérêt de 42371 liv. 1 s. 8 d., il faut prendre le vingtième de 42371 liv. 1 s. 8 d., qui est 2118 liv. 11 s. 1 d.; ou, à 5 p. %, établir la proportion suivante, ce qui revient au même:

100 : 42371 l. 1 s. 8 d. :: 5 : x = 2118 l. 11 s. 1 d.
ou (378) 20 : 42371 l. 1 s. 8 d. :: 1 : x.

Pour avoir l'intérêt de 15 ans 9 mois et 6 jours, il faut faire la multiplication suivante:

2118 l. 11 s. 1 d., intérêt d'un an.
15 ans 9 mois 6 jours.

Pour 15 ans	31778 l.	6 s.	3 d. *(b)*	
Pour 6 mois	1059	5	6 d. $\frac{1}{2}$,	la $\frac{1}{2}$ de l'intérêt d'un an.
Pour 3 mois	529	12	9 d. $\frac{1}{4}$,	la $\frac{1}{2}$ de celui de 6 mois.
Pour 6 jours	35	6	2 d. $\frac{13}{60}$.	
	33402 l.	10 s.	8 d. $\frac{58}{60}$.	

(a) A un denier d'intérêt pour 20, comme à 5 d'intérêt pour 100, il est évident que l'intérêt n'est autre chose que la vingtième partie du capital; car 5 est la vingtième partie de 100, comme 1 est la vingtième partie de 20.

(b) On a multiplié 2118 liv. 11 s. 1 den. par 15, à commencer par le denier, ce qui a donné pour produit 1 s. 3 den.; puis on a multiplié les 11 s., au produit desquels on a ajouté le sou retenu de l'opérat.on

2ᵉ. PROBLÈME.

515. Quel est l'intérêt de 15540 l. à $\frac{7}{8}$ pour 100 par mois, pour 7 mois 29 jours ?

Cherchez d'abord l'intérêt d'un mois.

$$100 : 15540 \text{ fr.} :: \tfrac{7}{8} : x.$$

		$\frac{7}{8}$	
Pour $\frac{4}{8}$	. . . .	7770	la $\frac{1}{2}$ du multiplicande.
Pour $\frac{2}{8}$	. . . .	3885	la $\frac{1}{2}$ du produit de $\frac{4}{8}$.
Pour $\frac{1}{8}$	. . . .	1942,50	la $\frac{1}{2}$ du produit de $\frac{2}{8}$.
		13597,50 (*a*).	

L'intérêt d'un mois à $\frac{7}{8}$ pour 100 est donc 135,97.

Pour avoir ensuite l'intérêt de 7 mois 27 jours, faites la multiplication suivante :

Intérêt de	1 mois. . .	135 f. 97
		7 mois 27 jours.
Intérêt de	7 mois. . .	951, 79
——	de 15 jours. . .	67, 99
——	de 10 jours. . .	45, 32
——	de 1 jour. . .	4, 53
——	de 1 jour. . .	4, 53
		1074, 16

516. En général, il faut chercher d'abord quel est l'inté-

précédente, ce qui a donné pour produit 8 liv. 6 sous; puis enfin on a multiplié 2118 liv. par 15, et on a ajouté au résultat les 8 liv. retenues de l'opération précédente, ce qui a donné pour produit 31778 l.; ainsi le produit total est 31778 liv. 6 s. 3 deniers.

(*a*) Après avoir multiplié le second terme par le troisième, c'est-à-dire, 15540 par $\frac{7}{8}$, il faut diviser le produit 13597,50 par le premier terme de la proportion, c'est-à-dire, par 100; ce qui se fait en retranchant deux chiffres de la droite de ce produit : le résultat de l'opération est fr. 135,97 c.

rêt d'un an, ou d'un mois au taux convenu, et multiplier ensuite le produit par le nombre des années ou les mois dont on veut connaître l'intérêt par les parties de l'année ou du mois qui accompagnent les années où les mois.

Formule générale pour le calcul de l'intérêt à 6 pour $\frac{0}{0}$ l'an.

517. L'intérêt étant fixé au taux de 6 p $\frac{0}{0}$ pour un an ou 360 jours (*a*), ou, ce qui revient au même, au taux de $\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$ pour un mois ou 30 jours pour trouver l'intérêt d'un capital quelconque,

1°. Multipliez le capital proposé par le nombre de jours pour lesquels l'intérêt en est dû; le résultat sera un capital sur lequel l'intérêt sera dû pour un jour.

2°. Ensuite, pour avoir l'intérêt d'un jour à 6 pour $\frac{0}{0}$ l'an, etc., du résultat obtenu par l'opération précédente, divisez ce résultat par 6000, ce qui se fait en prenant la sixième partie de ce même résultat après avoir préalablement séparé 3 chiffres à droite par une virgule.

EXEMPLE.

Quel est l'intérêt de 7545 fr. p. 2 mois 10 jours à 6 p. $\frac{0}{0}$ par an, ou, ce qui revient au même, à $\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$ par mois.

2 mois et 10 jours font 70 jours; 7545 f. $\times$ 70 jours $=$ 528150 f., dont il faut prendre l'intérêt pour un jour, en divisant 528150, par 6000, ce qui se fait en prenant la sixième partie de 528150, après en avoir séparé trois chiffres par une virgule.

OPÉRATION.

	528,150	6,000
Le sixième de	48	88 f., 02

Après avoir séparé trois chiffres de 528150, j'ai 528 fr. 15 c. à diviser par 6, ou dont il faut prendre le sixième qui est 88 fr. 02 c.

(*a*) On divise ici l'année en 360 jours, en nombre rond, au lieu de

Démonstration.

518. Il est évident que l'intérêt de 100 fr. pour 360 jours, ou celui de 100 fr. × 360 jours = 36000 fr. pour 1 jour, sera le même; qu'ainsi à 6 pour 100 l'an, l'intérêt d'un an pour 100 fr., de même que celui de 36000 fr. pour un jour est 6 fr. : il est donc évident que l'intérêt de 36000 fr. est 6 fr. pour 1 jour; or on sait qu'on pourrait réduire ce rapport à une plus simple expression en divisant 36000 et 6 par le plus petit de ces deux nombres, ce qui donne pour le rapport réduit à une plus simple expression 6000 : 1. Il est évident qu'à 6 p. % l'an, l'intérêt d'un jour n'est autre chose que la six millième partie du capital proposé : donc, pour avoir l'intérêt d'un jour d'un capital quelconque à 6 p. % l'an, il ne s'agit que de diviser ce capital par 6000.

Formule nouvelle, pour avoir toujours à diviser par 6000, *quel que soit le taux de l'intérêt.*

519. Il faut toujours ramener le taux de l'intérêt, quel qu'il soit, au taux de 6 p. %, en observant:

1°. Que l'intérêt à 3 pour 100, comparé à celui fixé à 6 pour 100, n'en est que les $\frac{3}{6}$ ou la . . . . $\frac{1}{2}$
2°. Qu'à 2 pour 100 il n'en est que les $\frac{2}{6}$ ou le . $\frac{1}{3}$
3°. Qu'à 1 pour 100 il n'en est que le. . . . . . $\frac{1}{6}$
4°. Qu'à 4 pour 100 il n'en est que les $\frac{4}{6}$ ou les . $\frac{2}{3}$
5°. Qu'à 5 pour 100 il n'en est que les . . . . . $\frac{5}{6}$
6°. Qu'à 7 pour 100 il n'en est que les . . . . . $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$
7°. Qu'à 8 pour 100 il n'en est que les . . . . . $\frac{8}{6} = 1\frac{1}{3}$
8°. Qu'à 9 pour 100 il n'en est que les . . . . . $\frac{9}{6} = 1\frac{1}{2}$

et ainsi de suite. Cela posé :

---

365 jours, et le mois en 30 jours; mais cela ne change rien au résulta que l'on cherche, par la raison que chaque capital, dont on cherche l'intérêt, est ensuite multiplié par le nombre exact des jours pour lesquels l'intérêt en est dû.

1°. Divisez par 6000 le capital quelconque dont il s'agit d'avoir l'intérêt pour un jour, lorsque l'interêt est à six pour $\frac{0}{0}$.

2°. Mais, lorsque l'intérêt n'est qu'à 3 pour 100, multipliez préalablement le capital par $\frac{1}{2}$, ce qui est en prendre la moitié, ou par $\frac{2}{3}$ si l'intérêt est à 4 p. $\frac{0}{0}$. Par $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{9}{6}$, s'il est à 5, 7, 8 ou 9 p. $\frac{0}{0}$, et ainsi de suite; après quoi divisez le résultat par 6000, le quotient sera l'intérêt que vous cherchez. En général :

520. Le capital dont on cherche l'intérêt pour un temps quelconque, doit être multiplié par le nombre de jours dont l'intérêt en est dû ; ensuite le résultat doit être multiplié par $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, etc., lorsque l'intérêt est à 1, 2, 3, 4 p. $\frac{0}{0}$, etc., et enfin le résultat de cette seconde opération doit être divisé par 6000.

Le quotient sera l'intérêt que l'on cherche.

Ainsi que celles ci-après, les opérations ci-dessus, dépendent de la règle de proportion composée, dont il sera traité à la suite des changes étrangers.

Des changes étrangers (*a*).

521. Lorsque l'on connaît le rapport des monnaies de deux nations, pour réduire les monnaies de l'une en celles de l'autre, il ne s'agit que de faire une règle de trois.

EXEMPLE.

Le change de Paris et Hambourg étant à 180 francs pour

(*a*) *Du change.*

Le change des lettres de change tirées des villes d'une nation sur d'autres villes de la même nation, est le bénéfice ou la perte que fait sur une lettre de change ou un billet celui qui prend ou négocie. *Cette perte ou bénéfice se règle à* 1, 2 *ou* 3, etc., *pour* 100, de la même manière que l'escompte (433). Il est inutile de rien ajouter ici.

100 marcs, monnaie d'Hambourg, on demande combien 8000 marcs valent en argent de France?

100 marcs : 180 fr. :: 8000 marcs : $x = 14400$ fr.

2°. EXEMPLE (*preuve du précédent*).

522. Le change entre Paris et Hambourg étant 180 fr. pour 100 marcs d'Hambourg, on demande combien 14400 f. valent de marcs?

180 fr. : 100 marcs :: 14400 fr. : $x = 8000$ marcs.

3e. EXEMPLE.

523. Le change entre Paris et Londres étant à 24 fr. pour 1 liv. sterl., on demande:

1°. Combien 500 liv. sterl. valent en argent de France?

2°. Combien 12000 fr. valent de livres sterling?

1°. 1 l. st. : 24 fr. :: 500 l. st. : $x = 12000$ fr.

2°. 24 fr. : 1 l. st. :: 12000 fr. : $x = 500$ l. st.

Ainsi:

524. Lorsque la valeur de l'unité des monnaies de l'une des deux nations, qui font entre elles une opération de change, est exprimée par une certaine quantité d'unités des monnaies de l'autre, l'opération arithmétique se réduit à une simple multiplication ou division (*a*).

525. Lorsque la valeur d'une certaine quantité d'unités des monnaies d'une nation est exprimée par une certaine quantité d'unités des monnaies d'une autre nation, l'opération se réduit à une simple règle de trois. Voyez (406).

526. Lorsque la valeur d'une certaine quantité d'unités des monnaies d'une nation est exprimée par des monnaies qui ne sont qu'une fraction de l'unité principale des mon-

---

(*a*) Toute proportion dont le premier ou le second terme est l'unité, n'est autre chose qu'une multiplication ou division; et, réciproquement, une multiplication ou division peut être considérée comme une proportion dont le premier ou le second terme est l'unité.

naies d'une autre nation, on ne peut réduire les monnaies de l'une et celles de l'autre, qu'autant que l'on connaît :

1°. Le prix du change ;

2°. Le rapport des unités d'un ordre inférieur, qui expriment le prix du change avec l'unité principale dont elles ne sont qu'une fraction.

EXEMPLE.

Le change entre Bordeaux et Londres étant à 28 d. sterl. pour 3 fr., on demande combien 12000 fr. valent de livres sterling?

Pour résoudre ce problème, il faut en outre du prix du change, qui est donné en deniers sterling d'Angleterre, connaître le rapport des deniers sterling aux sous sterling, et des sous ster. aux livres sterl.

12 den. ster. = 1 sous ster.
20 sous ster. = 1 liv. ster.
ou 240 den. ster. = 1 liv. ster.

OPÉRATION.

Comme on connaît le rapport de l'argent de France avec les deniers ster., on peut d'abord changer les 12000 fr. en deniers ster., proportionnellement au prix du change, par le moyen de la proportion suivante :

3 f. : 28 den. :: 12000 fr. : x = 112000 d. st.

En effet, 28 d. st. est le terme de même nature que celui que je cherche; et il est plus petit que ce dernier; mais le terme de même nature que celui que je cherche, ayant pour unité 1 d. ster., le quatrième terme sera des deniers st. (404), et je veux réduire mes 12000 f. en l. ster.; après les avoir réduits en den. ster. par la proportion ci-dessus, il ne reste donc plus qu'à savoir réduire 112000 den. ster. en liv. ster. Or, ce nombre de deniers vaut autant de sous qu'il contient de fois 12 d.; pour connaître ce nombre de fois, il faut donc diviser 112000 den. par 12, le résultat est 9333 s. 4 den. ster.; enfin ce nombre de sous vaut autant de fois 1 liv. ster. qu'il con-

tient de fois 20 s. ster. ; pour connaître ce nombre de fois, il faut donc diviser 9333 s. 4 d. par 20, le résultat est 466 l. 13 s. 4 d st. = 12000 fr. En un mot :

527. On peut, par une règle de trois, réduire l'argent de France en den. ster., au prix du change donné en deniers ster., après quoi il faut ;

1°. Diviser le résultat de la règle de trois par 12, pour réduire les deniers ster. en sous ster. ;

2°. Diviser les sous ster. par 20 pour les réduire en livres sterling ;

Ce qui exige que l'on connaisse le rapport des deniers aux sous, et des sous aux livres ster.

ABRÉVIATION.

528. Puisqu'il y a 240 den. ster. dans 1 liv ster., on voit que 1 den. ster. n'est autre chose que $\frac{1}{240}$ de la livre ster., et que 28 den. ne sont autre chose que $\frac{28}{240}$ de livre ster. Or, en supprimant le dénominateur de la fraction $\frac{28}{240}$ de liv. sterling ; ou, ce qui revient au même, en considérant 28 den. ster. comme 28 liv. ster., on aurait ce dernier nombre pour second terme de la proportion ci-dessus ; mais alors, ce terme ayant été multiplié par 240 (255), il faut multiplier le premier terme par 240 (378), ou indiquer cette multiplication.

Cela posé, considérons le second terme de la proportion ci-dessus comme un nombre de livres sterling, et indiquons la multiplication du premier terme par 240.

3 f. : 28 liv. st. :: 12000 f. : x = 466 l. 13 s. 4 d. st.

	× 240			
1°.	60	:	7	
2°.	10	:		
3°.				2000

OPÉRATION.

1°. J'ai pris le quart de 240 et de 28 que j'ai effacés ;

2°. le sixième de 60 et de 12000 que j'ai effacés ; 3° le dixième de 10 et de 2000 en effaçant un zéro à droite de chacun de ces deux termes ; en dernier résultat, j'ai eu 3 pour premier, 7 pour second, et 200 pour troisième termes ; or, en multipliant le troisième par le second, et divisant le produit par le premier, on a pour résultat 466 liv. 13 s. 4 den. ster.

EXEMPLE.

529. Le change entre Bordeaux et Londres, étant à 28 d. st. pour 3 fr., on demande combien 466 liv. 13 s. 4. st. valent en argent de France?

28 d. st. : 3 fr. :: 466 liv. 13 s. 4 d. st. : x = 12000 fr.

20

9333 s.

12

112000 d.

1°. 7. 28000

2°. 1. 4000

OPÉRATION.

J'ai réduit d'abord le troisième terme en deniers, ce qui m'a donné 112 000 d. (416) ; après quoi : 1°. pris le quart du premier et troisième terme que j'ai effacés ; 2°. le septième de sept et de 28000 résultats de la réduction précédente. Par ce moyen j'ai eu 1 pour premier terme, 3 pour le second, et 4000 pour le troisième ; le quatrième est donc 12000 fr.

EXEMPLE.

530. Le change d'Amsterdam avec Paris étant à 54 den. de gros, argent de Hollande, pour 3 fr. et 40 den. de gros étant égaux à 1 florin de Hollande, on demande combien 12000 fr. valent de fl. de Hollande. ?

3 fr. : 54 d. :: 12000 fr. : x = 216000 d.

Réponse : flor. 5400

Par une simple règle de trois, on ne peut réduire les 12000 fr. qu'en deniers de gros; il faut ensuite diviser les 216000 den. par 40 den. pour les réduire en florins, ce qui donne 5400 fl., et ce qui exige qu'en outre du prix du change qui donne le rapport de l'argent de France aux deniers de gros, on connaisse le rapport des deniers de gros aux florins.

Abréviation.

531 — 540. Puisqu'il y a 40 d. de gros dans un flor., un d. de gros n'est autre chose que $\frac{1}{40}$ de flor., et 54 den. ne sont autre chose que $\frac{54}{40}$ de florin; or, en supprimant le dénominateur de cette fraction ou en considérant 54 den. comme un nombre de florins, on multiplié ce terme par 40, et il faut multiplier alors le premier terme aussi par 40, ou indiquer cette multiplication (378) Donc :

	3 fr. :	54 flor. ::	12000 fr. :	x
	× 40			
1°.	10		3000	
2°.	1		300	
3°.	1		100	

OPÉRATION.

En considérant 54 d. comme 54 florins, on a 54 florins pour second terme, et le premier doit être multiplié par 40. Cela posé : 1°. j'ai pris le quart de 40 et de 12000 que j'ai effacés; 2°. le dixième de 10 et 3000, en effaçant un zéro à la droite de chacun de ces termes; 3°. le tiers de 3 et de 300 que j'ai effacés, le résultat est 54 fl. × 100 = 5400 fl.

EXEMPLE.

541. Le change d'Amsterdam avec Paris étant à 54 den. de gros, pour 3 f.; et 40 den. de gros étant égaux à 1 fl. on demande combien 5400 fl. valent en francs.

54 d. :	3 fr. ::	5400 flor. :	x = 12000 fr.
		40	
		21600 d.	
18	: 1		
			15

OPÉRATION.

D'abord j'ai réduit le troisième terme en unités de même espèce que le premier, en multipliant 5400 fl. par 40 den. (401); après quoi j'ai pris le tiers des deux premiers termes que j'ai effacés; ensuite le second terme étant l'unité, j'ai eu le quatrième terme de la proportion, en divisant 21600 par 18. Le résultat a été 12000 fr.

Ce qui a exigé qu'en outre du prix du change ou du rapport des deniers de gros aux francs, je connusse le rapport des deniers de gros aux florins.

542. Observez donc qu'on ne peut opérer les changes étrangers par une simple règle de proportion que dans le cas où l'on connaît le rapport des monnaies que l'on veut changer, avec celles dans lesquelles on veut les réduire; mais lorsque l'on ne connaît le rapport des monnaies que l'on veut changer qu'avec une fraction de la monnaie en laquelle on veut réduire, la quantité des monnaies que l'on veut changer est avec celle de la monnaie en laquelle on veut la réduire, dans un rapport égal au rapport composé des deux ou trois rapports simples, etc., qu'il faut connaître pour opérer cette réduction.

Il en résulte que les questions de cet ordre dépendent de ce qu'on appelle la règle de proportions composées.

Notions générales sur les proportions composées.

543. *Si l'on a deux proportions et qu'on les multiplie par ordre, c'est-à-dire le premier terme de l'une par le premier de l'autre, le second par le second, et ainsi de suite, les produits qui en résulteront seront en proportion, et formeront ce qu'on appelle une règle de proportion composée.* En effet, multiplier ainsi deux proportions, c'est multiplier deux rapports égaux par (383) deux rapports égaux; or, il est évident qu'en multipliant des grandeurs égales par un même nombre, les produits sont égaux; les deux rapports qui ré-

sultent de cette opération sont donc nécessairement égaux, et les quatre produits qui forment ces deux rapports égaux sont en proportion (381); ils forment donc une proportion composée de deux autres. Par exemple, ayant cette proportion, 2 : 4 :: 3 : 6 et celle-ci : 3 : 12 :: 4 : 16, en multipliant la première par la deuxième, terme par terme, on aura; $2 \times 3 : 4 \times 12 :: 3 \times 4 : 6 \times 16 = 6 : 48 :: 12 : 96 = 1 : 8 :: 1 : 8$ (378), et cette proportion sera composée de deux autres. Ou, en d'autres termes :

544. *Si l'on multiplie deux proportions rapport par rapport, les deux produits seront deux rapports égaux, dont les quatre termes seront toujours en proportion, et formeront ce qu'on appelle une proportion composée.*

En effet, si l'on écrit les deux proportions ci-dessus, sous la forme des deux fractions qui expriment les deux rapports égaux dont elles sont formées chacune (350), on aura la première de ces deux proportions sous cette forme : $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, et la seconde sous celle-ci : $\frac{3}{12} = \frac{4}{16}$; donc, en multipliant le premier rapport de l'une par le premier rapport de l'autre, et ensuite le second rapport de l'une par le second rapport de l'autre, ce qui est multiplier deux rapports égaux par deux rapports égaux, rapport par rapport, on aura : $\frac{2 \times 3}{4 \times 12} = \frac{3 \times 4}{6 \times 16}$ (263); ou en remettant ces deux fractions égales sous la forme de deux rapports égaux qu'elles expriment, on aura comme ci-dessus (543) :

$$2 \times 3 : 4 \times 12 :: 3 \times 4 : 6 \times 16 = 6 : 48 :: 12 : 96 = 1 : 8 :: 1 : 8.$$

Donc, lorsqu'on multiplie une proportion par une autre, rapport par rapport, comme terme par terme, les produits seront deux rapports égaux, dont les quatre termes formeront toujours une proportion, laquelle sera composée de deux proportions données.

De même lorsqu'une proportion composée de deux autres est multipliée par une troisième proportion, terme par terme,

ou rapport par rapport, le résultat est une proportion composée des trois proportions données, et ainsi de suite pour une quatrième, une cinquième proportion, etc.

545. On appelle rapport composé le produit de deux ou d'un nombre quelconque de rapports qu'on a multipliés successivement, savoir deux, l'un par l'autre, leur produit par un troisième, le produit de ces trois par un quatrième; et ainsi de suite pour un cinquième, un sixième, etc; ou, ce qui revient au même, dont on a multiplié les antécédens entre eux, et les conséquens entre eux, pour en former un seul antécédent et un seul conséquent, ou les deux termes du rapport composé de tous les rapports simples donnés, ce qui se fait en multipliant deux antécédens l'un par l'autre, leur produit par un troisième, celui de ces trois par un quatrième, et ainsi de suite, et en formant le produit de tous les conséquens par la même méthode (546).

546. Ou encore en indiquant seulement les multiplications dont l'antécédent et le conséquent composés doivent être chacun le produit, ce qui se fait en écrivant tous les antécécédens à gauche les uns au-dessous des autres, et tous les conséquens à droite aussi, les uns au-dessous des autres, séparés chacun de son antécédent par ce signe : comme suit :

2 : 3
4 : 12

Après quoi pour avoir le rapport composé de ces deux, il ne s'agit que de former le produit des antécédens et celui des conséquens; mais pour avoir le rapport réduit à une plus simple expression, on peut prendre des parties égales sur l'un des facteurs de l'antécédent et sur l'un de ceux du conséquent (269).

547. Ainsi: *un rapport composé n'est autre chose que le produit de tous les rapports composans.*

548. On sait qu'un rapport quelconque peut toujours être exprimé par une fraction (350) et (352).

Il en résulte que le rapport composé de deux autres peut toujours être considéré comme une fraction de fraction, c'est-à-dire, comme une fraction qui est le produit de la multiplication des deux fractions qui expriment les rapports composans, ou qui aura pour numérateur et pour dénominateur le produit des deux numérateurs et des deux dénominateurs de ces mêmes fractions; ou, en d'autres termes encore, qui aura pour numérateur le produit des deux antécédens et des deux conséquens des rapports composans. Donc en général :

549. Le rapport composé de deux, de trois, ou d'un nombre quelconque de rapports, peut être considéré comme une fraction qui a pour numérateur le produit de tous les antécédens, et pour dénominateur le produit de tous les conséquens des rapports composans.

550. Le rapport inverse composé de deux, de trois ou d'un plus grand nombre de rapports inverses, n'est également que le produit de toutes les fractions qui expriment les rapports inverses composans; et la différence consiste uniquement en ce que chaque rapport inverse, étant exprimé par une fraction qui a le conséquent pour numérateur et l'antécédent pour dénominateur (352), le rapport composé d'une quantité quelconque de rapports inverses est une fraction qui a pour numérateur le produit de tous les conséquens des rapports inverses composans, et pour dénominateur celui de tous leurs antécédens.

551. *Tout rapport composé direct ou inverse, est le produit de toutes les fractions qui expriment les rapports composans.*

L'opération par laquelle on détermine le rapport composé direct ou inverse est donc évidemment la même que celle par laquelle on forme le produit de plusieurs fractions, ou que celle relative aux fractions de fractions (267); et l'analogie est si évidente, que toute autre explication serait inutile. Dans la théorie des rapports composés, il n'y a donc rien encore qu'on ne connaisse déjà.

552. Il suit de ce qui précède, qu'on peut appliquer aux deux termes d'un rapport quelconque, tout ce qui a été dit des changemens qu'on peut faire aux deux termes d'une division (337), d'une fraction (269), ou à leurs facteurs. En sorte que pour avoir le rapport composé direct ou inverse, réduit à sa plus simple expression, après avoir indiqué la multiplication de toutes les fractions qui expriment les rapports composans (546), ou encore la multiplication de tous les antécédens et de tous les conséquens de ces mêmes rapports, on peut ensuite opérer comme sur les facteurs du numérateur et du dénominateur d'une fraction (269), ou comme sur les facteurs d'un dividende et d'un diviseur, ce qui ne changera rien au rapport composé direct ou inverse.

La différence consistera uniquement en ce qu'il faudra prendre le produit des antécédens pour numérateur ou pour dividende, et le produit des conséquens pour dénominateur ou pour diviseur, si le rapport composé est direct; tandis qu'il faudra prendre au contraire le produit des conséquens pour numérateur ou pour dividende, et celui des antécédens pour dénominateur ou diviseur, si le rapport composé est inverse.

553. Ayant deux, trois ou quatre proportions, et ainsi de suite, que l'on doit multiplier successivement, terme par terme, pour en composer une seule (543), le rapport composé du premier rapport de chacune est nécessairement le même que celui qui doit être composé de leurs seconds rapports, puisque le second rapport de toute proportion est nécessairement le même que le premier (383).

D'où il suit qu'en général:

554. *Lorsqu'on connaît le premier des deux rapports composés qui doivent former une proportion composée, on connaît le second sans qu'il soit nécessaire de faire toutes les opérations dont il doit être le résultat.*

En effet, puisque dans toute proportion le second rapport est égal au premier, ou est le même que le premier, il est

évident qu'on peut prendre le premier pour le second, et celui-ci pour le premier. De même :

555. Lorsqu'on connaît le premier des deux rapports égaux dont une proportion composée doit être formée, ou, ce qui revient au même, *lorsqu'on connaît tous les rapports simples dont le premier de ces deux rapports égaux doit être formé, et l'antécédent seulement du second rapport composé, on peut avoir le conséquent du second rapport en multipliant son antécédent par le rapport inverse, composé de tous les rapports simples connus.* En effet, puisque dans toute proportion le conséquent du second rapport n'est autre chose que le produit de l'antécédent de ce second rapport par le rapport inverse des deux autres termes (386); dans une proportion composée, le conséquent du second rapport composé ne doit être autre chose que le produit de l'antécédent de ce second rapport, par le raport inverse des deux autres termes de cette même proportion composée.

Or, pour avoir le premier dès deux rapports composés dont cette proportion doit être formée, il faut d'abord former le produit de tous lés rapports simples connus (545), ou indiquer seulement la multiplication de tous les antécédens et de tous les conséquens des rapports simples connus, pour en former un seul antécédent et un seul conséquent; ensuite le produit des antécédens de tous les rapports simples connus sera le premier terme d'une proportion composée, qui aura pour second terme le produit des conséquens de ces mêmes rapports, et pour troisième terme l'antécédent du second rapport composé. On trouvera donc en effet le quatrième terme de cette proportion composée, en multipliant le troisième par le second et en divisant leur produit par le premier, ce qui est multiplier l'antécédent du second rapport composé par le rapport inverse des deux premiers termes de cette proportion composée, et par conséquent ce qui est multiplier le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche, par le rapport inverse composé de tous les rapports simples donnés.

On en a conclu la règle de proportion composée.

De la règle de proportion composée.

556. Lorsque le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche doit former avec ce dernier un rapport composé égal au rapport composé de deux, trois, quatre, etc. rapports simples donnés dans cette même question ; pour trouver le nombre que l'on cherche, on pourrait faire successivement autant de règles de trois qu'il y a de rapports simples donnés par l'énoncé de la question, et le quatrième terme de la dernière serait le nombre que l'on cherche ; mais, pour abréger :

Il faut considérer le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche, comme le troisième terme d'une proportion composée, qui aura pour premier terme le produit de tous les antécédens, pour second terme le produit de tous les conséquens des divers rapports simples donnés; et pour quatrième terme le nombre que l'on cherche. En un mot :

Il faut composer préalablement un seul rapport de tous les rapports simples donnés, pour trouver ensuite par une seule règle de trois la quantité que l'on cherche (555).

1er. EXEMPLE.

40 hommes ont fait 176 mètres d'ouvrage en 9 jours. Combien 72 hommes en feront-ils en 40 jours?

176 mètres est le nombre qui est comparé à celui que je cherche; or, il est évident que l'ouvrage inconnu sera plus grand à proportion que le nombre des hommes sera plus grand, ainsi que celui des jours qu'ils doivent employer à le faire. Pour connaître le nombre des mètres proportionné à l'augmentation du nombre des hommes seulement, et en supposant qu'ils auraient tous travaillé un même nombre de jours, on peut donc établir cette proportion :

40 hom. : 72 hom. :: 176 mèt. : $x = 316$ met. 80 centimèt.

Mais, comme les 72 hommes doivent travailler plus de

jours que les 40, il est évident qu'ils feront plus de 316 mètr. 80 centimètres d'ouvrage, à proportion qu'ils travailleront un plus grand nombre de jours; qu'ainsi, pour connaître l'ouvrage qu'ils feront, il faut établir cette seconde proportion :

9 jours : 14 jours :: 316 mèt. 80 cent. : x = 492 mèt. 80 c.

492 mèt. 80 cent. est donc en dernier résultat le nombre que l'on cherche.

Mais il est évident que l'on peut obtenir le même résultat sans faire séparément chacune de ces deux proportions. En effet, on voit : 1°. que le troisième terme de la première est 176 mètres, c'est-à-dire, n'est autre chose *que le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche;*

2°. Que 316 mêtres 80 centimètres, troisième terme de la seconde, n'est autre chose que le *quatrième terme de la première*, et par conséquent n'est autre chose que le produit du troisième terme de celle-ci, par le rapport inverse de ses deux autres termes (386);

3°. Enfin que 492 mètres 80 centimèt., quatrième terme de la seconde, n'est autre chose que *le nombre que l'on cherche.*

Or, dans cette seconde règle de trois, on n'a fait que multiplier le produit, qui est le résultat de la première par le rapport inverse des deux premiers termes de la seconde; et on sait qu'ayant à multiplier une quantité par un multiplicateur quelconque, puis le produit par un second multiplicateur, et ainsi de suite pour un troisième, un quatrième multiplicateur, etc., on obtiendrait le même résultat en multipliant la quantité proposée par le produit de tous les multiplicateurs proposés. Il est donc évident qu'*ayant à multiplier le nombre dont on cherche la valeur, d'abord par le rapport inverse de la première des deux règles de trois à faire; et ensuite le produit de cette multiplication par le rapport inverse des deux premiers termes de la seconde, on obtiendrait le même résultat en multipliant le nombre qui est comparé*

à celui que l'on cherche, par le produit de ces deux rapports inverses.

557. On en a conclu que, *dans chacune des questions qui donnent lieu à faire successivement deux, trois ou quatre règles de trois, etc., on peut, sans les faire séparément, trouver le nombre que l'on cherche, en formant d'abord le produit des rapports simples exprimés par les deux premiers termes de ces différentes règles de trois, et en multipliant ensuite le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche, par le rapport inverse composé de tous ces rapports simples* (556).

Opération abrégée de l'exemple du numéro (556).

40 hom. : 72 hom.
9 jours : 14 jours :: 176 mètres : x

Pour avoir le rapport inverse composé des deux rapports simples ci-dessus, il faut former le produit des antécédens de ces deux rapports, ainsi que celui de leurs conséquens, et prendre ce dernier pour numérateur d'une fraction qui aura pour dénominateur le produit des antécédens (545); après quoi, pour avoir le nombre que l'on cherche, il ne s'agit plus que de multiplier 176 mètres par la fraction qui exprime le rapport inverse composé des deux rapports inverses ci-dessus, ce qui est multiplier 176 mètres par le produit des conséquens, et diviser le résultat par le produit des antécédens de deux rapports simples donnés ci-dessus (557).

558. Cela posé; on voit qu'on peut indiquer ces opérations afin de les abréger encore avant de les faire. En effet, on peut indiquer les opérations dont le quatrième terme doit être le résultat :

1°. En plaçant les rapports simples les uns au-dessous des autres, pour indiquer qu'on doit former le produit des antécédens et celui des conséquens de ces rapports simples (556), et que le premier de ces deux produits sera le premier terme

de la proportion composée, qui aura le second pour second terme;

2°. En plaçant à la droite du dernier conséquent le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche, précédé de ce signe :: et suivi de celui-ci :, pour indiquer que *le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche sera le troisième terme de cette proportion*, et qu'il doit former, avec celui que l'on cherche, un rapport égal au rapport composé de tous les rapports simples donnés dans la question proposée.

Or, il est évident, après cela, qu'en multipliant le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche, par le produit des conséquens, et qu'en divisant le résultat par le produit des antécédens, on aura le nombre que l'on cherche; mais que, pour abréger ces opérations, on peut préalablement prendre des parties égales sur l'un des facteurs de l'antécédent, et sur l'un de ceux du conséquent du premier rapport composé, comme sur l'un des facteurs du numérateur et sur l'un de ceux du dénominateur d'une fraction (269), ou comme (337), puisque cela ne changera ni le premier rapport composé, ni le résultat que l'on cherche.

2e. EXEMPLE.

559. Quel est l'intérêt de 12000 fr. pour 70 jours, 6 fr. étant l'intérêt de 100 fr. pour un an ou 360 jours (*a*)?

L'intérêt 6 fr. est le nombre qui est comparé à celui que je cherche.

Or, il est évident que l'intérêt que je cherche doit être plus grand à mesure que le capital est plus grand, et plus petit à mesure que le nombre des jours est plus petit.

Pour connaître l'intérêt proportionnel aux capitaux, et en

(*a*) On divise l'année ici en 360 jours, en nombre rond, au lieu de 365; mais cela est indifférent pour le résultat que l'on cherche, par la raison qu'il est calculé sur le vrai nombre des jours qui portent intérêt.

supposant qu'ils eussent été prêtés tous deux pour un an ou 360 jours, on pourrait donc établir cette proportion.

100 f. capit. : 12000 f. capit. :: 6 f. intér. : $x = 720$ f. intér.

Mais, comme 100 fr. ont été prêtés pour 360 jours, tandis que 12000 fr. ne l'ont été que pour 70 jours seulement, il est évident que l'intérêt doit en être plus petit que 720 fr., comme 70 jours est un nombre plus petit que 360 jours. Pour connaître exactement l'intérêt de fr. 12000, on pourrait donc ensuite établir cette proportion :

360 jours : 70 jours :: 720 fr. intér. : $x = 140$ fr. intér.

Or, on peut ne faire qu'une seule opération de ces deux, en les indiquant ainsi :

100 f. : 12000 f.
360 j. : 70 j. :: 6 f. int. : $x = 140$ f. int.

Et, pour avoir le quatrième de cette proportion, il ne s'agit que d'opérer comme on vient de l'indiquer (558).

560. Remarquez, avant de passer outre, que, lorsqu'on opère séparément deux règles de trois pour trouver le nombre que l'on cherche :

1°. Le troisième terme de la première est toujours le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche dans le problème proposé ;

2°. Le quatrième terme de la première devient le troisième de la seconde ; et que cela est général, par la raison que *le quatrième terme, ou le résultat de la première, doit toujours former, avec le nombre que l'on cherche dans la seconde, un rapport égal au rapport exprimé par les deux premiers termes de cette seconde règle de trois*, rapport qui est toujours donné par l'énoncé de la question proposée ;

3°. Qu'ainsi, lorsqu'il s'agit ensuite de composer une seule proportion de ces deux, en les multipliant terme par terme (543), on peut toujours supprimer préalablement le quatrième terme de la première et le troisième de la seconde,

comme étant égaux l'un à l'autre, puisque cela ne change rien au second rapport composé (268) ;

4°. Et qu'après cela, *le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche, se trouve toujours former avec ce dernier un rapport égal au rapport composé des deux rapports simples, exprimés par les deux premiers termes de chacune de ces deux proportions.*

En effet, reproduisons les deux proportions qui résultent du premier des deux exemples ci-dessus :

40 hom. : 72 hom. :: 176 mètr. : 316 mètr. 80 centimètr.
9 jours : 14 jours :: 316 m. 80 c. : 492 m. 80 centimètr.

Le troisième terme de la première est le nombre qui, dans la question proposée, est comparé à celui que l'on cherche ; le quatrième terme de la première est aussi le troisième de la seconde ; lorsqu'il s'agit ensuite de ne former qu'une seule proportion de ces deux, et qu'on supprime préalablement le quatrième de la première et le troisième de la seconde en les effaçant par un trait de plume, le second rapport de la proportion composée reste le même (268), et *le nombre qui, dans la question proposée, est comparé à celui que l'on cherche, se trouve former avec celui-ci un rapport égal au rapport composé des deux rapports simples donnés dans cette même question.*

Et il en serait de même si l'on avait à former une seule proportion des deux qui résultent du second des deux exemples ci-dessus; puis si l'on supprimait par un trait de plume le quatrième terme de la première et le troisième terme de la seconde.

100 f. cap. : 12000 f. cap. :: 6 f. int. : 720 f. int.
360 jours : 70 jours :: 720 f. int. : 140 f. int.

Comme dans tous les cas, où, après avoir établi deux proportions, il s'agit ensuite d'en composer une seule, et de réduire le second rapport composé à une plus simple expression,

en supprimant le quatrième terme de la première et le troisième de la seconde. Donc en général :

561. Dans chaque question relative à une proportion composée, *on peut toujours considérer le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche comme le troisième terme d'une proportion composée, lequel doit former avec le nombre que l'on cherche un rapport égal au rapport composé des deux rapports simples donnés.*

Or, il en serait évidemment de même, quel que fût le nombre des rapports simples donnés; car, si on avait un troisième rapport simple donné, par exemple, il faudrait faire une troisième proportion dont les deux premiers termes seraient l'antécédent et le conséquent de ce nouveau rapport simple, et qui aurait pour troisième terme le quatrième de la proportion précédente; comme celle-ci, qui avait pour premier et second termes l'antécédent et le conséquent du second rapport simple donné, avait pour troisième terme le quatrième de celle dont elle est précédée, et ainsi de suite pour un plus grand nombre de rapports simples donnés. D'où il suit que chaque nouvelle proportion ayant, comme la seconde son troisième terme égal au quatrième de la proportion précédente, le troisieme de chacune et le quatrième de celle dont chacune est précédée, peuvent être supprimés, et que la quantité qui est comparée à celle que l'on cherche devient seule le troisième terme de la proportion composée de toutes les proportions simples dont elle est le produit, et compose avec la quantité que l'on cherche un rappòrt égal au rapport composé de tous les rapports simples donnés.

4e. EXEMPLE.

562. 1°. Le prix du change entre Paris et Amsterdam étant à 54 deniers de gros monnaie d'Amsterdam, pour 3 francs.

2°. 12 den. de gr. étant égaux à un sou de gr. monnaie de Hollande;

3°. Le prix du change entre la Hollande et l'Angleterre

étant à 36 sous de gr. pour une liv. sterl. monnaie d'Angleterre;

4°. 1 liv. st. étant égale à 240 d. st.;

5°. Le prix du change entre Londres et Cadix étant fixé à 40 den. st. pour un ducat monnaie d'Espagne;

On demande ce que valent 12000 fr. en ducats d'Espagne, aux prix ci-dessus?

Puisque le rapport de la valeur des francs à celle des ducats n'est pas connu, et puisqu'on ne connaît que le rapport de la valeur des francs aux deniers de gros, de celle des deniers de gros aux sous de gros, de ceux-ci aux liv. sterling, de ces dernières aux deniers sterling, et enfin de ceux-ci aux ducats, il est évident qu'on ne peut pas réduire les francs en ducats par une seule règle de trois simple, mais qu'on peut, par une première règle de trois, réduire les francs en deniers de gros, ces deniers en sous de gros par une seconde règle de trois, les sous de gros qu'on aura trouvés en livres sterling par le moyen d'une autre règle de trois, les liv. sterl. qu'on aura trouvées en deniers sterling par une quatrième règle de trois, et enfin les deniers sterl. en ducats par une dernière règle de trois qui donnera la réponse à la question proposée, ou fera connaître la quantité de ducats que l'on cherche. En effet, puisque 3 fr. valent 54 den. de gros, il est évident qu'on aurait 54 d. de gros pour 3 fr., et qu'on en aurait un plus grand nombre à proportion pour 12000. On pourrait donc établir en premier lieu cette proportion.

3 l. : 54 d. :: 12000 l. : $x = 216000$ d. de gros.

Puisque 12 den. de gros valent 1 sou de gros, il est évident qu'on aurait 1 sou de gros pour 12 den. de gros et qu'on en aurait un plus grand nombre à proportion pour les 216000 den. de gros trouvés par l'opération précédente. Donc on pourrait établir en second lieu cette nouvelle proportion :

12 d. : 1 s. :: 216000 d. : $x = 18000$ d. de gros.

Puisque 36 sous de gros valent 1 liv. sterling, il est évident qu'on aurait un nombre proportionné de liv. sterl. pour les 18000 sous de gros trouvés par l'opération précédente. Donc on pourrait établir cette troisième proportion :

36 s. : 1 liv. :: 18000 s. : $x =$ 500 l. ster.

Puisque 1 liv. st. vaut 240 den. st., 500 liv. vaudront un plus grand nombre de deniers à proportion. Donc on pourrait établir cette quatrième proportion :

1 l. : 240 d. :: 500 l. : $x =$ 120000 d. ster.

Enfin puisque 40 deniers sterling valent 1 ducat, il est évident que 120000 deniers sterling en vaudront un plus grand nombre à proportion. Donc, pour connaître ce nombre de ducats, il ne s'agit plus que d'établir cette proportion :

40 d. st. : 1 duc. :: 120000 d. st. : $x =$ 3000 duc.

Ainsi, en composant une seule proportion de ces cinq proportions, on aurait la proportion composée des 5 proportions suivantes, dans chacune desquelles l'un des 5 rapports simples donnés est le premier rapport.

3 l.	:	54 d.	::	12000 l.	:	216000 d.
12 d.	:	1 s.	::	216000 d.	:	18000 s.
36 s.	:	1 l. st.	::	18000 s.	:	500 l. st.
1 l. st.	:	240 d. st.	::	500 l. st.	:	120000 d. st.
40 d. st.	:	1 duc.	::	120000 d. st.	:	3000 duc.

En supprimant le quatrième terme de toutes ces proportions simples, excepté celui de la dernière, et en supprimant le troisième terme de toutes, à l'exception de celui de la première, c'est-à-dire, en supprimant tous les facteurs communs aux deux termes du second rapport de la proportion composée de toutes les proportions simples établies, et ce second rapport qui reste le même, et par conséquent qui est

égal au rapport composé de tous les rapports simples donnés par l'énoncé de la question, a pour antécédent le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche, et ce dernier pour conséquent, et cela est général (560 et 561). On peut donc, au lieu d'opérer chacune des règles de trois simples en particulier, considérer le nombre qni est comparé à celui que l'on cherche, comme étant avec ce dernier dans un rapport égal au rapport composé de tous les rapports simples donnés; et, en établissant tous ceux-ci les uns au-dessous des autres, considérer le produit de tous leurs antécédens comme le premier terme d'une règle de trois composée, qui a le produit de tous les conséquens pour second terme, et pour troisième terme le nombre que l'on compare à celui que l'on cherche; d'où il suit que ce dernier sera le quatrième terme de la proportion composée qu'on peut établir pour l'exemple ci-dessus. Ainsi :

3	:	54 d.
12 d.	:	1 s.
36 s.	:	1 l. st.
1 l. st.	:	240 d. st.
40 d.	:	1 duc.
		:: 12000 f. : x = 3000 d.

Ce qui donne cette proportion composée :

$$3 \times 12 \times 36 \times 1 \times 40 : 54 \times 1 \times 1 \times 240 \times 1 :: 12000 : x \text{ duc.}$$

La règle qui est ainsi composée de plusieurs règles de trois, et qui n'en forme qu'une seule, dont le résultat est le même que celui de toutes les autres, est ce qu'on appelle la *règle de proportion composée*.

563. Or, on voit que le second terme de cette proportion composée doit être multiplié par le troisième; que le produit doit être divisé par le premier terme pour qu'on trouve le quatrième, et qu'on peut indiquer ces opérations, en écrivant sous le dernier conséquent, le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche. Ainsi :

3 f. : 54 d.
12 d. : 1 s.
36 s. : 1 l. st.
1 l. st. : 240 d. st.
40 d. st. : 1 duc.
:: 12000 : $x = 3000$ duc.

Lorsque cette règle est posée pour être terminée par une simple division comme en ce dernier cas, on l'appelle *règle conjointe*.

De la règle conjointe.

564. La règle conjointe, ainsi nommée, parce qu'elle a pour objet de joindre ensemble plusieurs règles de trois, et de n'en former qu'une seule dont le résultat est le même que celui des différentes règles de trois simples dont elle est formée, n'est autre chose que la règle de proportion composée (*a*).

Toute la difficulté de cette règle consiste uniquement dans la manière de la poser.

De la manière de poser la règle conjointe.

565. L'énoncé de toutes les questions que l'on peut proposer sur la règle conjointe renferme toujours une quantité connue, qui est, avec celle que l'on cherche, dans un rapport égal au rapport composé de tous les rapports simples donnés par ce même énoncé.

Tous les rapports simples donnés doivent donc être écrits les uns sous les autres, afin d'en composer un seul dont l'antécédent et le conséquent seront les premier et second termes d'une règle de trois composée, qui aura pour troisième terme le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche, et qui aura ce dernier pour quatrième terme.

Toute la difficulté se réduit donc en effet à écrire les uns

(*a*) Elle est appelée en Allemagne la *règle de chaîne*.

au-dessous des autres, tous les antécédens et tous les conséquens de ces différens rapports simples.

Or, en les écrivant dans un ordre soumis à des règles constamment les mêmes dans tous les cas possibles (*a*), on ne peut plus éprouver la moindre difficulté à poser la règle conjointe.

Principes pour poser la règle conjointe.

Tous les antécédens et tous les conséquens des divers rapports simples qui doivent composer un seul et même rapport, doivent être écrits les uns au-dessous des autres, sa-

---

(*a*) En opérant séparément les différentes règles de trois que l'on peut faire avec chacun des rapports simples donnés, afin de composer ensuite une seule proportion de toutes les proportions simples établies, on doit remarquer :

1°. *Que le premier antécédent de la première de ces proportions simples a la même unité que le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche* (562) ; il doit en être nécessairement toujours de même dans tous les cas semblables ;

2°. *Que dans chacune le conséquent est la valeur connue de l'antécédent* (562) ;

3°. Que le quatrième terme de chacune devient le troisième de la suivante (562) ; qu'ainsi, dans chacune, l'antécédent du second rapport étant le même que le conséquent du second rapport de la précédente, a nécessairement la même unité que les conséquens de la précédente, ce qui a également lieu dans le premier rapport égal au second, d'où il suit que, *dans chacun des rapports simples écrits les uns au-dessous des autres, l'antécédent a nécessairement toujours la même unité que le conséquent du rapport précédent* ;

4°. Enfin que le conséquent du second rapport de la dernière de ces proportions simples, n'est autre chose que le nombre que l'on cherche ; qu'ainsi le conséquent du premier rapport de cette même proportion a la même unité que le nombre que l'on cherche, puisque le premier rapport est égal au second (502) ; d'où il suit que *le conséquent du dernier de tous les rapports simples a la même unité que le nombre que l'on cherche.* Conséquemment tous les antécédens et tous les conséquens des différens rapports simples doivent être écrits les uns au-dessous des autres, selon les principes établis (566 et suiv.).

voir, les antécédens à gauche et les conséquens à droite, selon les principes suivans :

566. 1°. *Il faut que l'unité du premier antécédent soit la même que celle du nombre dont on cherche la valeur.*

567. 2°. *Il faut que le premier conséquent et en général que chaque conséquent soit la valeur connue de son antécédent.*

568. 3°. Dans chaque rapport que l'on écrit au-dessous du premier, *l'antécédent doit avoir la même unité que le conséquent du rapport qui précède.*

569. 4°. *Il faut que l'unité du dernier conséquent soit la même que celle du nombre que l'on cherche.*

570. 5°. *Il faut écrire le nombre dont on cherche la valeur au dessous de la colonne formée par le conséquent.*

La règle étant ainsi posée se réduit à une simple division.

Tous les facteurs du diviseur sont compris dans la colonne formée par les antécédens.

Tous le facteurs du dividende dans celle formée par le conséquent et par *le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche.*

571. Pour avoir le nombre que l'on cherche, il ne s'agit que de diviser *le produit des conséquens et du nombre dont on cherche la valeur* par le produit des antécédens (*a*).

OPÉRATION.

La règle conjointe, étant posée sur les principes établis (566), indique les multiplications dont le dividende et le diviseur doivent être les résultats, et la division dont le quotient sera le nombre que l'on cherche. Mais avant de faire ces opérations, il faut faire sur les facteurs du divividende et sur

---

(*a*) Pour la démonstration des principes, numéros (566), (567), (568), (569), voyez dans la note du numéro (565) les articles 1°., 2°., 3°., 4°.

ceux du diviseur les réductions suivantes, qui ne changeront rien au quotient.

572. 1°. Lorsque l'un des antécédens est une fraction, supprimez-en le dénominateur en l'effaçant par un trait de plume (255), et portez ce dénominateur sous la colonne des conséquens, pour indiquer qu'il doit être l'un des facteurs du dividende (337).

De même si l'un des conséquens est une fraction, supprimez-en le dénominateur par un petit trait de plume, et portez ce dénominateur sous la colonne des antécédens, pour indiquer qu'il doit être l'un des facteurs du diviseur (337), et ainsi de suite pour toute autre fraction qui sera antécédent ou conséquent.

573. 2°. Lorsque l'un des antécédens est un nombre fractionnaire ou complexe, il faut d'abord le réduire en une fraction (192 et 243), supprimer le dénominateur de celle-ci (255), porter ce dénominateur sous la colonne des conséquens (572); ensuite, après avoir effacé par un trait de plume l'antécédent sur lequel on a opéré cette réduction, il faut porter le résultat de celle-ci sous la colonne des antécédens.

De même si l'un des conséquens est un nombre fractionnaire ou complexe, il faut le réduire en fraction, supprimer le dénominateur qu'il faut porter sous la colonne opposée, et après avoir effacé par un trait de plume le conséquent sur lequel on a opéré cette réduction, il faut porter le résultat de celle-ci sous la colonne des conséquens.

Il faut opérer de même sur chaque antécédent et chaque conséquent dans les mêmes cas; il faut opérer sur le nombre dont on cherche la valeur, les mêmes réductions que sur l'un des autres facteurs du dividende (*a*).

574. Ensuite il faut prendre des parties égales sur un des facteurs du dividende, et sur un de ceux du diviseur indifféremment dans tous les cas où cela est possible sans reste, en

---

(*a*) Voyez le second paragraphe du n°. (573).

observant d'effacer, par un trait de plume, les deux facteurs sur lesquels on a pu opérer cette réduction, et de porter sous la colonne de chacun la partie qu'on en a prise.

Il faut répéter cette opération sur ses deux résultats si elle est possible, et ainsi de suite autant de fois qu'elle sera possible sans reste, et sur autant d'antécédens et de conséquens qu'il s'en trouvera qui pourront être divisés l'un et l'autre par un même nombre sans reste.

575. 4°. Lorsqu'il se trouvera un antécédent égal à un conséquent, on les effacera l'un et l'autre par un trait de plume, et il faut en faire de même autant de fois qu'il se trouvera un antécédent égal à un conséquent.

676. 5°. Lorsqu'il se trouvera que certains antécédens et conséquens, ou certains facteurs du diviseur et du dividende ne seront autre chose que l'unité, il faut les effacer chacun par un trait de plume (71).

Toutes ces réductions sont fondées sur le principe suivant :

577. *Le quotient reste le même lorsqu'on multiplie ou divise les deux termes d'une division, ou l'un des facteurs de l'un et l'un des facteurs de l'autre par un même nombre.*

578. Après ces réductions, il faut, pour avoir le nombre que l'on cherche : 1°. former le produit des facteurs du dividende; 2°. celui des facteurs du diviseur; 3°. diviser le premier de ces deux produits par le second.

Le quotient sera le nombre que l'on cherche, et par conséquent aura la même unité que le nombre que l'on cherche.

OBSERVATIONS.

579. Lorsqu'en supprimant tous les facteurs communs aux deux termes de la division, ces facteurs se trouvent tous supprimés, ou qu'en prenant deux parties égales sur l'un des facteurs de l'un et sur l'un de ceux de l'autre, le dividende et le diviseur se trouvent réduits à l'unité, le nombre que l'on cherche n'est autre chose que l'unité (272).

580. Lorsque tous les facteurs du diviseur seulement sont supprimés ou réduits à l'unité, le diviseur seulement est réduit à l'unité (277).

Le quotient ou le nombre que l'on cherche est alors le même que le dividende (143), et par conséquent n'est autre chose que le produit de tous les facteurs du dividende.

581. Au contraire, lorsque tous les facteurs du dividende sont supprimés ou réduits chacun à l'unité, le dividende seulement est réduit à l'unité. Or, ayant l'unité pour dividende, le quotient ou le nombre que l'on cherche n'est autre chose qu'une fraction qui a l'unité pour numérateur, et le produit de tous les antécédens pour dénominateur.

582. Lorsque le nombre, qui est comparé à celui que l'on cherche, est fractionnaire ou complexe, on peut néanmoins ne pas le réduire en un nombre entier, et opérer d'ailleurs sur les autres facteurs du dividende, et sur ceux du diviseur, les réductions indiquées (572, 573, 574, 575).

Mais en ce cas, après ces réductions, pour avoir le dividende, il faut : 1°. former d'abord le produit des conséquens ; 2°. et ensuite, en opérant par les parties aliquotes, *multiplier par ce produit le nombre fractionnaire ou complexe qui est comparé à celui que l'on cherche*, en observant que, dans cette dernière multiplication, le produit doit avoir la même unité que le nombre qui est comparé à celui que l'on cherche (404).

Après quoi, pour avoir le nombre que l'on cherche, il faut opérer comme (570).

Application de la règle conjointe à l'un des changes d'Espagne.

583. On veut réduire 12640 fr. en ducats d'Espagne. Le change étant à 17 fr. 44 cent. pour 1 pistole, quelle sera la quantité de ducats que produira cette réduction ?

Nota.	La pistole d'Espagne vaut. . . .	4	piastres.
	La piastre.	8	réaux de p.
	Le réal de plate	34	maravédis.
	375 maravédis.	1	ducat.

Règle posée selon les principes.

(566)	17 fr. 44 cent. :	1 pist.	(567).
(568)	1 pist. d'Esp. :	4 piast.	*idem.*
Idem	1 piastre :	8 réaux	*idem.*
Idem	1 réal :	34 mar.	*idem.*
Idem	375 maravedis :	1 ducat	(569).
	:: 12640 fr. :	x	(570).

OPÉRATION.

17 f. 44 c. :	1 pistole
1 pistole :	4 piastres
1 piastre :	8 réaux
1 réal :	34 maravédis
375 marav. :	1 ducat
:: 12640 fr. :	x.

1744	100
436	25
75	2528
15	5
3	1.
109	632

Multiplication

des antécédens.	*des conséquens.*
109	4
3	8
327	32
	34
	128
	96
	1088
	632
	2176
	3264
	6528
	687616

1°. On a multiplié 17 f. 44 c. par 100 en supprimant la virgule, ce qui a donné 1744 f. pour produit, et on a porté 100 sous la colonne opposée;

2°. On a pris le quart de 1744 et de 100 qu'on a effacés, ce qui a donné 436 et 25;

3°. On a pris le 5ᵉ. de 375 et de 12640 qu'on a effacés, ce qui a donné 75 et 2528;

4°. On a pris le 5ᵉ. de 75 et de 25, ce qui a donné 15 et 5;

5°. On a pris le 5ᵉ. de 15 et de 5, ce qui a donné 3 et 1;

6°. Enfin on a pris le quart de 436 et de 2528, ce qui a donné 109 et 632, et on effacé toutes les unités.

Reste aux antécédens 109 et 3 qu'il faut multiplier, ce qui donne 327 pour le produit des antécédens.

Il faut également multiplier les conséquens, qui sont 4 piastres 8 réaux 34 maravédis et 632 fr.

Or, $4 \times 8 = 32$, $32 \times 34 = 1088$, et 1088×632 donne 687616 pour le produit des conséquens et du nombre qui est comparé à celui que l'on cherche.

Enfin 687616, divisé par 327, produit des antécédens, fait trouver au quotient le nombre que l'on cherche, lequel est 2102 duc. $\frac{262}{327}$.

Les unités du résultat de l'opération sont des ducats, parce qu'elle avait pour objet de réduire des francs en ducats.

Application de la règle conjointe aux changes étrangers en général.

584. Les opérations arithmétiques les plus compliquées sur les changes étrangers se réduisent toutes à une règle conjointe (*a*).

Mais, pour résoudre toutes les questions que l'on peut proposer sur les changes étrangers, il faut connaître avec la règle conjointe, 1°. les monnaies diverses de chacune des nations avec lesquelles on veut opérer; 2°. le mode de leurs changes; 3°. le prix du change au moment de l'opération; 4°. le pair. En un mot, il faut connaître les principes qui constituent la science de la banque et du change, bien distincte de l'arithmétique, avec laquelle on ne peut pas la confondre sans créer des difficultés qui n'existent pas, lorsqu'on étudie chacune de ces deux sciences en particulier.

Ayant traité du change et des opérations de banque en particulier, dans toute l'étendue que ces matières comportent (*b*), et de manière néanmoins à les mettre à la portée des personnes les moins exercées à l'étude, on se bornera ici à un petit nombres d'exemples sur la réduction des monnaies d'un pays en monnaies d'un autre pays, en donnant dans chaque problème le rapport des monnaies qu'il faut connaître pour le résoudre.

Changes d'Espagne avec la France.

1er. EXEMPLE.

585. On veut réduire 3400 fr. en réaux de weillon d'Es-

(*a*) Ainsi, lorsqu'on sait faire une opération de change étranger par la règle conjointe, on sait les faire toutes.

(*b*) Dans mon *Traité de Change*, ou *Manuel de la Banque*

pagne, sachant : 1°. que le prix du change est à 15 fr. pour une pistole d'Espagne; 2°. qu'une pistole vaut 32 réaux de plate; 3°. que 17 réaux de plate valent 32 réaux de weillon, 4°. que le réal se divise en 34 maravédis.

Règle conjointe.

(566)	15 fr.	:	1 pistole	(567)
(568)	1 pistole	:	32 reaux plate	
	17 réaux plat. :		32 réaux weillon	(569)
		::	3400 f. : $x = 13653\frac{1}{3}$ réaux w.	

1°.	1	200
2°.		
3°.	3	40

1°. J'ai pris le 17e. de 17 et de 3400 f. (574); 2°. j'ai effacé les unités; 3°. j'ai pris le 5e. de 15 et de 200 (574); 4°. j'ai formé le produit des facteurs du dividende, c'est-à-dire, des nombres 32, 32 et 40, et j'ai eu pour dividende 40960 réaux de weillon (529); 5°. j'ai divisé par 3, seul facteur du diviseur :

Le quot. 13653 $\frac{1}{3}$ réaux de weillon est la valeur de 3400 fr. ou le nombre que l'on cherche.

Preuve.

On veut réduire 13653 $\frac{1}{3}$ réaux weillon en argent de France sur les mêmes données que ci-dessus.

Règle conjointe.

32 réaux weill.	:	17 réaux plate
32 réaux plat.	:	1 pistole
1 pistole	:	15 fr.
	::	13653 $\frac{1}{3}$ réaux w. : $x = 3400$ f.

1°.	3	40960
2°.	1	5
3°.	4	5120
4°.	1	1280
5°.	4	160
6°.	1	40
7°.		

1°. J'ai réduit 13653 $\frac{1}{3}$ en un nombre entier (572); 2°. j'ai pris le tiers de 3 et de 15; 3°. le 8e. de 4096o et de 32; 4°. le quart de 4 et de 5120; 5°. le 8e. de 32 et de 1280; 6°. le quart de 4 et de 160; 7°. j'ai effacé les facteurs réduits à l'unité.

Après ces réductions, tous les facteurs du diviseur sont supprimés, et le quotient sera égal au dividende (580).

Pour avoir le dividende, j'ai formé le produit de ses facteurs 5, 40 et 17, lequel produit est 3400 fr. (529). Ce nombre est donc le dividende, et en même temps le quotient ou le nombre que l'on cherche, c'est-à-dire, est la valeur de 13653 $\frac{1}{3}$ réaux weillon.

OBSERVATION.

586. En divisant 40960 réaux weillon par 3, j'ai eu 13653 réaux weillon au quotient. Le reste de la division étant un réal weillon, j'aurais pu réduire en maravédis de weillon ce reste en le multipliant par 34 maravédis, et continuer la division pour avoir des maravédis au quotient; mais, pour abréger, j'ai mis le reste sous la forme d'une fraction.

En général, on peut suivre cette méthode qui abrège la preuve de chaque opération; mais quand la preuve aura assuré que l'opération est exacte, on pourra ensuite réduire la fraction qui accompagne les entiers du quotient en subdivisions connues de l'unité dont elle exprime des parties (238).

Par exemple, dans 13653 $\frac{1}{3}$ réaux de weillon, on peut prendre le numérateur 1 de la fraction pour dividende, et le dénominateur 3 pour diviseur; cela posé, on aura un réal de weillon à diviser par 3, Or un réal de weillon réduit en maravédis en vaut 34, et 34 maravédis divisés par 3 = 11 maravédis $\frac{1}{3}$. On a donc 13653 réaux weillon 11 maravédis $\frac{1}{3}$, au lieu de 13653 $\frac{1}{3}$ réaux weillon.

2e. EXEMPLE.

587. On veut réduire 6000 fr. en réaux de plate sur les mêmes données que ci-dessus.

Francs en réaux de plate.

	15 fr.	:	1 pistole
	1 pist.	:	32 réaux de plat.
			:: 6000 fr. : x = 12800 réaux plat.
1°.	1		400
2°.			

Cette opération est la même que la précédente avec un rapport de moins; 1°. j'ai pris le 15e. de 15 et de 6000: 2°. j'ai supprimé les facteurs réduits à l'unité; par ce moyen tous les facteurs du diviseur étant supprimés, le produit des facteurs du dividende sera le nombre que l'on cherche. Ainsi 32 réaux plate × 400 = 12800 réaux plate est le nombre que l'on cherche ou la valeur de 6000 fr.

Preuve.

588. On veut changer 12800 réaux plate en argent de France sur les mêmes données que ci-dessus.

Réaux de plate en francs.

	32 réaux pl.	:	1 pistole
	1 pistole	:	15 fr.
			:: 12800 réaux pl. : x = 6000 f.
1°.	1		400
2°.			

1°. J'ai pris les 32e. de 32 qui est 1, et de 12800 qui est 400, car on a vu ci-dessus que 32 × 400 = 12800, donc 12800 divisés par 32 = 400; 2°. j'ai supprimé les facteurs réduits à l'unité.

Par ce moyen les facteurs du diviseur sont tous supprimés et le produit des facteurs du dividende sera le nombre que l'on cherche. En effet 15 fr. × 400 = 6000 fr. (579).

3e. EXEMPLE.

589. On veut réduire 12000 fr. en pistole, le change étant à 15 fr. pour 1 pistole d'Espagne.

15 f. : 1 pistole
:: 12000 fr. : x = 800 pistoles.

Cette opération se réduit à une simple division.

Preuve.

590. On veut réduire 800 pistoles en France sur les mêmes données que ci-dessus.

1 pistole : 15 fr.
:: 800 pist. : x = 12000 fr.

Cette opération se réduit à une simple multiplication (579).

4e. EXEMPLE.

591. Sachant que le change est à 15 fr. pour une pistole, que la pistole vaut 1088 maravédis, et que 375 maravédis valent un ducat d'Espagne, on veut réduire 12000 fr. en ducats d'Espagne.

Francs en ducats.

15 fr. : 1 pistole
1 pist. : 1088 maravédis
375 mar. : 1 ducat
:: 12000 fr.

1°.	3	2400
2°.	75	480
3°.	15	96
4°.	5	32

1°. J'ai pris le 5e. de 15 et de 12000; 2° le 5e. de 375 et de 2400; 3°. le 5e. de 75 et de 480; 4°. le tiers de 15 et de 96. Par ce moyen le diviseur sera 3 $\times$ 5 = 15; le dividende sera 1088 $\times$ 32 = 34816 ducats; or, 34816 divisés par 15 = 2321 $\frac{1}{15}$.

Preuve.

592. On veut réduire 2321 $\frac{1}{15}$ ducats en argent de France sur les mêmes données que ci-dessus.

Ducats en francs.

	1 ducat	:	375 maravédis
	1088 marav.	:	1 pistole
	1 pistole	:	15 fr.
		::	2321 $\frac{1}{15}$ duc. : $x = 12000$ fr.

1°.	15	34816
2°.		
3°.	1	32

1°. J'ai réduit 2321 $\frac{1}{15}$ en un nombre entier (572) ; 2°. j'ai supprimé 15 facteur du diviseur et 15 facteur du dividende; 3°. j'ai pris le 1088e. de 1088 et de 34816. Or, on a vu ci-dessus que $1088 \times 32 = 34816$; donc, 34816 divisé par 1088, est 32 ; le 1088e. de 34816 est donc 32 ; tous les facteurs du diviseur étant supprimés, le nombre que l'on cherche sera le produit de tous les facteurs du dividende, c'est-à-dire, sera $375 \times 32 = 12000$ fr. (579).

5°. EXEMPLE.

593. Le change étant à 15 fr. pour 1 pistole, et sachant que la pistole vaut 4 piastres, on demande combien 12000 f. valent de piastres ?

Francs en piastres.

15 fr.	:	1 pistole
1 pist.	:	4 piastres
	::	12000 f. : $x = 3200$ piastres.

1°. J'ai pris le 15e. de 15 et de 12000, qui est 800 ;
2°. J'ai ensuite multiplié 800 par 4.

Le résultat 3200 piastres est le nombre que je cherche, ou la valeur de 12000 f.

Preuve.

594. On veut changer 3200 piastres en francs sur les mêmes données que ci-dessus.

4 piast. :	1 pistole	
1 pist. :	15 fr.	
		:: 3200 piast. : $x = 12000$.

1°. J'aïs pris le quart de 4 et de 3200, lequel est 1 et 800;
2°. J'ai ensuite multiplié 800 par 15, le résultat est 12000 fr.

6ᵉ. EXEMPLE.

595. Le change étant à 3 f. 75 c. pour une piastre d'Espagne, on demande combien 1200 f. valent de piastres?

3 fr. 75 cent :	1 piastre.	
		:: 12000 fr. : $x = 3200$ piast.

1°.		100
2°.	75	20
3°.	15	4
4°.	1	800

1°. J'ai supprimé la virgule de 3,75 et porté 100 sous la colonne opposée; 2°. j'ai pris le 5ᵉ. de 375 et de 100; 3°. le 5ᵉ. de 75 et de 20; 4°. le 15ᵉ. de 15 et de 12000. Tous les facteurs du diviseur étant supprimés, le produit des facteurs du dividende $4 \times 800 = 3200$ piastres sera le nombre que l'on cherche.

OBSERVATIONS.

596. Quelques villes d'Espagne règlent le change avec la France sur 1 pistole; d'autres sur une piastre. L'opération arithmétique ne varie que par la différence des rapports simples dont on doit composer un seul rapport par la règle conjointe.

Changes d'Hambourg avec la France.

Sachant: 1°. que le change, entre Paris et Hambourg, à 188 fr. pour 100 marcs banco;

2°. Que cette ville compte en marcs que l'on y divise en 16 sous ou skilings, divisés eux-mêmes en 12 deniers;

3°. Que 2 marcs valent un weschel thaler, ou écu de change;

4°. Que 3 marcs valent un rixdale;

5°. Que 7 ½ marcs valent 1 livre de gros;

6°. Que l'on divise la livre de gros en 20 sous de gros de 12 den. de gros pièce;

7°. Que 1 sous de gros vaut 6 skilings;

8°. Que 1 skiling vaut 2 den. de gros;

9°. Que 100 marcs de banque en valent 124 courans.

On demande combien 37600 fr. valent en marc banco d'Hambourg?

(566)	188 fr. :	100 marcs banco	(569)
		:: 37600	
1°.	47	9400	
2°.	1	200	

1°. J'ai pris le quart de 188 et de 37600;

2°. Le 47ᵉ. de 47 est de 9400.

Le résultat est 100 marcs banco × 200 = 20000 m. ban.

Preuve.

597. On demande combien 20000 marcs banco valent en argent de France sur les mêmes données que ci-dessus?

100 m. ban. : 188 fr.
:: 20000 marcs banco : x = 37600 fr.

Après avoir supprimé deux zéro à 100 et à 20000, le résultat est 37600 f.

2ᵉ. EXEMPLE.

598. Combien 12560 liv. 11 s. 6 d. argent de France valent-ils de marcs banco au change de 188 liv. pour 100 marcs banco?

188 liv. : 100 marcs banco
:: 12560 l. 11 s. 6 d.

1256000 m.
50
5
2 8 s.

1256057 8 s. | 188
m. b. 6681 l. 2 s. 6 d.

1280..
1525.
217
29
16

174
29.
8

472
96
12

1152
24

OPÉRATION.

Pour abréger, je n'ai pas réduit 12560 liv. 11 s. 6 d. en un nombre entier (582), et j'ai multiplié par ce nombre les 100 marcs, en opérant par les parties aliquotes (582); le produit est marcs banco 1256057 . 8 s. que j'ai divisés par 188; le résultat est m. b. 6681 l. 2 s. 6 d., exact à un petit reste près que j'ai abandonné.

Preuve.

599. On veut changer 6681 m. 2 s. 6 den. en argent de France, au change de 188 liv. pour 100 marcs.

100 marcs : 188 liv.
:: 6681 m. 2 s. 6 d. : $x =$ 12560 l. 11 s. 5 d.

	53448		
	53448.		
	6681..		
Pr. 2 s. le 8e.	23	10	
Pr. 4 d. le 6e.	3	18	4
Pr. 2 d. la $\frac{1}{2}$.	1	19	2
	12560,57 l.	7 s.	6 d.
	20		
	11,47		
	12		
	5,70		

OPÉRATION.

En operant par les parties aliquotes, j'ai multiplié 188 l. par 6681 m. 2 s. 6; le produit est 1256057 l. 7 s. 6 d. (404), que j'ai divisé par 100 (570), le résultat ou le nombre que l'on cherche est 12560 l. 11 s. 5 den., exact à moins d'un denier près, différence produite par le reste que j'ai abandonné ci-dessus.

2e. EXEMPLE.

600. On veut changer 12000 f. en weschels thalers sur les mêmes données que ci-dessus.

188 fr. : 100 marcs
2 m. : 1 w. th.
:: 12000 : x w. th. 3191 $\frac{23}{47}$.

1°.	1	6000
2°.	47	1500

1°. J'ai pris la $\frac{1}{2}$ de 2 et de 12000; 2°. le $\frac{1}{4}$ de 188 et 6000; 3°. j'ai multiplié 15000 par 100, et j'ai divisé le produit

150000 m. (571) par 47 ; le quotient w. th. 3191 $\frac{23}{47}$ est le nombre de weschels thalers que l'on cherche.

(601) *Preuve.*

	1 w. th. :	2
	100 :	188
	::	3191 $\frac{23}{47}$: x 12000 f.
1°.	47	15000
2°.		
3°.	1	4

OPÉRATION.

1°. J'ai réduit 3191 $\frac{23}{47}$ en un nombre entier ; 2°. j'ai supprimé 2 zéro à 100 et à 150000 ; 3°. j'ai pris le 47e. de 47 et de 188.

Les facteurs du diviseur étant tous supprimés, le produit des facteurs du dividende $2 \times 1500 \times 4 = 12000$ fr. (579) est donc le nombre que l'on cherche.

3e. EXEMPLE.

602. On veut changer 12000 fr. en rixdales, sur les mêmes données que ci-dessus.

	188 fr. :	100 marcs
	3 :	1 rixd.
	::	12000 f. : $x =$ 2127 rixd. $\frac{31}{47}$ (404)
1°.	1	4000
2°.	47	1000

OPÉRATION.

1°. J'ai pris le tiers de 3 et de 12000 ; 2°. le quart de 188 et de 4000. Le dividende sera $1000 \times 100 = 100000$ rixdales (404) ; le nombre que l'on cherche est rixd. 2127 $\frac{23}{47}$, quotient de 100000 rixd. divisés par 47.

Preuve.

1 rixd.	:	3 marcs.
100 marcs	:	188 fr.
	::	$2127\frac{31}{47}$: $x = 12000$ fr.

1°.	47	100000
2°.	1	4
3°.		

OPÉRATION.

1°. J'ai réduit $2127\frac{31}{47}$ en un nombre entier ; 2°. j'ai pris le 47ᵉ. de 47 et de 188 ; 3°. j'ai suppaimé 2 zéro à 100 et à 100000.

Le nombre que je cherche est $1000 \times 4 \times 3 = 12000$ f. (404).

4ᵉ. EXEMPLE.

603. On veut réduire 12000 f. en livre de gros sur les mêmes données que ci-dessus.

188 francs	:	100 marcs
$7\frac{1}{2}$ m.	:	1 liv. de gros
	::	12000 f. : $x = 851\frac{3}{47}$ (404) l. de gros.

1°.	15	2
2°.	47	3000
3°.	1	200

OPÉRATION.

1°. J'ai réduit $7\frac{1}{2}$ en un nombre entier (572) ; 2°. j'ai pris le quart de 188 et 12000 ; 3°. le 15ᵉ. de 15 et de 3000.

Le dividende est $100 \times 2 \times 200 = 40000$ liv. de gros, que j'ai divisé par 47 f. ; le nombre que l'on cherche est 851 liv. $\frac{3}{47}$ liv. de gros.

Preuve.

1 l. de gros :		$7\frac{1}{2}$ marcs
100 marcs	:	188 fr.
	::	$851\frac{3}{47}$ l. de gr. : $x = 12000$ f.

1°.	47	40000
2°.	2	15
3°.	1	4
4°.		
5°.	1	2

OPÉRATION.

1°. J'ai réduit 851 $\frac{3}{47}$; 2°. 7 $\frac{1}{2}$ chacun en un nombre entier; 3°. j'ai pris le 47ᵉ. de 47 et de 188; 4°. j'ai effacé 2 zéro à 100 et à 40000; 5°. j'ai pris la $\frac{1}{2}$ de 2 et de 4.

Les facteurs du diviseur sont tous supprimés; le dividende est $15 \times 2 \times 400 = 12000$ fr., qui est le nombre que l'on cherche.

5ᵉ. EXEMPLE.

604. Le prix du change étant à 188 fr. pour 100 marcs banco, et 100 marcs banco étant égaux à 124 marcs courans, on demande combien 12000 f. valent de marcs courans?

188 fr. : 100 marcs banco
100 m. ban. : 124 marc courans
:: 12000 fr. : $x = 7914 \frac{42}{47}$

47 3000

1°. J'ai supprimé 100 au diviseur et au dividende; 2°. j'ai pris le quart de 188 et de 12000. Le dividende est marcs cour. 372000, le diviseur 47, le quotient ou le nombre que l'on cherche est marcs cour. 7914 $\frac{42}{47}$.

Preuve.

124 m. c. : 100 m. banco
100 : 188
:: m. c. 7914 $\frac{42}{47}$: $x = 12000$ f.

1°. J'ai réduit 7914 $\frac{42}{47}$ en un nombre entier; 2°. j'ai pris le 47ᵉ. de 47 et de 188; 3°. j'ai supprimé 100 au diviseur et au dividende; 4°. j'ai pris le quart de 124 et de 4, qui est 31 et 1; 5°. j'ai divisé 372000 par 31. Le quotient 12000 est le nombre que l'on cherche.

Nota. Ayant donné un nombre suffisant d'exemples de la manière d'opérer la règle conjointe lorsqu'elle est posée, elle sera seulement posée dans les exemples suivans, sans entrer dans les détails de l'opération, qui sont toujours conformes aux mêmes principes.

Changes de la Hollande avec la France.

605. Sachant que l'on compte en Hollande en florins de 20 stuivers de 12 d. pièce ou 16 pennins ;

Que dans les changes le florin se divise en 40 d. de gros ;

Que 100 d. de gros = 1 rixdale,
240 d. de gros = 1 livre de gros;

Que l'on divise la livre de gros en 20 sous de gros de 12 d. de gros pièce :

Que 1 s. de gros = 12 d. de gros = 6 stuivers,
1 stuiver = 16 pennins = 2 d. de gros ;

Que 100 flor. de banque valent 105 flor. courans ;

Enfin que le change entre Amsterdam et Paris est à 54 d. pour 3 fr. On demande :

1°. Combien 12000 fr. valent de florins banco?

Règle.		*Preuve.*	
3 fr. :	54 d.	1 fl. :	40 d.
40 d. :	1 flor.'	54 d. :	3 fr.
	:: 12000 fr. : x		:: 5400 flor. : x
Rép. : Flor. ban. 5400.		Rép. : 12000 fr.	

606. 2°. Combien 12000 fr. valent de rixdales sur les mêmes données que ci-dessus.

Règle.		*Preuve.*	
3 fr. :	54 d.	1 rix. :	100 d.
100 d. :	1 rixd.	54 d. :	3 fr.
	:: 12000 fr. : x		:: 2160 rix. : x
Rép. : 2160 rixdal.		Rép. ; 12000 fr.	

607. 3°. Combien 12000 fr. valent de livres de gros sur les mêmes bases que (605).

Règle.

3 fr. : 54 den.
240 d. : 1 l. de gros
:: 12000 fr. : x

Rép. : 900 liv. de gros.

Preuve.

1 liv. : 240
54 d. : 3 fr.
:: 900 liv. : x

Rép. : 12000 f.

608. 4°. Combien 12000 fr. valent-ils de florins courans sur les mêmes données que ci-dessus ?

Règle.

3 fr. : 54 d.
40 den. : 1 fl. banco
100 fl. b. : 105 fl. cour.
:: 12000

Rép. : flor. cour. 5670.

Preuve.

105 flor. : 100 flor. ban.
1 flor. : 40 den.
54 den. : 3 fr.
:: 5670

Rép. : 12000 fr.

Pour changer des monnaies d'un pays quelconque en monnaie d'un autre pays, et pour tous les problèmes que l'on peut proposer sur les opérations de banque et de change, voyez mon *Traité du change*, elles y sont traitées dans toute leur étendue.

Deuxième application de la même règle pour découvrir à combien reviendraient en argent de France des marchandises achetées au poids à Amsterdam.

AMSTERDAM ET PARIS

609. 1°. Un négociant sachant que le poivre ne vaut à la vente de la compagnie de Hollande que 24 d. de gros banco la liv. pesant de Hollande;

2°. Que 99 liv. $\frac{1}{6}$ poids d'Amsterdam valent 100 l. ancien poids de m. Paris;

3°. Que la liv., ancien poids de marc, était composée de 9219 grains;

4°. Que le kilogramme vaut 18827 gr. de l'ancien poids de marc français;

5°. Que la compagnie déduit 4 pour 100 sur l'achat pour prompt payement;

6°. Que la réduction ci-dessus étant faite, on ajoute 2 par 1000 pour les pauvres;

7°. Qu'on peut faire les fonds à 54 den. de gros pour 3 francs.

8°. Et que les frais d'Amsterdam à Paris sont de 4 pour 100;

Ce négociant demande à combien lui reviendra, à proportion, le kil. de poivre en argent de France?

Dans cet exemple, il ne s'agit que de convertir un kilogramme de poivre en argent de France, proportionnellement au rapport des poids et des monnaies de change de France, de Hollande, aux rapports de l'escompte, du prompt payement, du tribut pour les pauvres, et des frais, etc.

Règle.

1	kil. de poiv.	:	18827	grains pesant poiv.
9216	grains	:	1	liv. de France.
100	l. de France	:	99	l. $\frac{1}{6}$ p. d'Amsterd.
1	liv. d'Amst.	:	24	den. de gros.
100	den. de gros	:	96	d. esc. déduit.
1000	den.	:	1002	d. avec le trib. p. les pauv.
100	den.	:	104	d. y compris les frais.
54	den.	:	33	fr.
		::	1 kil.	: x.

Rép. : $x = 2$ fr. 70 cent.

On ne multipliera pas les exemples de cette nature, parce qu'il suffit de connaître le rapport des poids et mesures des différentes nations commerçantes, et les principes déjà établis pour résoudre tous les problèmes relatifs aux achats de marchandises faits dans l'étranger, ainsi que ceux relatifs aux ventes.

Troisième application de la même règle pour déterminer le poids de l'argent fin contenu dans les anciennes monnaies de France.

Pour cet objet voyez mon *Traité du change*.

Quatrième application pour déterminer la fin des monnaies d'or et d'argent, et des valeurs numéraires.

Voyez mon *Traité du change*.

Cinquième application aux changes indirects.

610. 1°. Le prix du change entre Paris et Amsterdam étant à 54 den. de gros pour 3 fr.

2°. 12 d. de gros étant égaux à un sou de gros;

3°. Le prix du change entre Amsterdam et Londres étant à 36 s. de gros pour 1 liv. st.;

4°. 1 liv. st. étant égale à 240 d. st.;

5°. Le prix du change entre Londres et Cadix étant fixé à 40 d. st. pour 1 ducat d'Espagne;

On demande ce que valent 12000 fr. en ducats d'Espagne aux prix ci-dessus?

Règle.			*Preuve.*		
3 fr.	:	54 den.	1 ducat	:	40 d.
12 d.	:	1 s. de gr.	240 d.	:	1 liv.
36 s. de gr.	:	1 liv. st.	1 liv. st.	:	36 s. de gr.
1 liv.	:	240 d. st.	1 s. de gr.	:	11 d. de g.
40 d. st.	:	1 ducat.	54 d.	:	3 liv.
	::	12000 fr. : x		::	3000 duc. : x
Rép. : $x = 3000$ duc. (744)			Rép. : $x = 12000$		

Sixième application à la réduction des poids d'un pays en poids d'un autre pays, ou pour déterminer leur rapport mutuel lorsqu'on connaît leur rapport avec d'autres poids.

611. 1°. 1 liv. du poids de Russie étant égale à 8512 as du poids de marc d'Amsterdam;

2°. 10 as du poids d'Amst. étant égaux à 9 grains du poids français ;

3°. 18 grains 827 millièmes étant égaux à 1 gram. ;

On demande : 1°. combien 1 kilogramme vaut de livres de Russie ; 2°. combien 1 liv. de Russie vaut de parties du kilogr. ?

1ère. *Règle.*			*Preuve.*		
1 kilogr.	:	1000 gram.	1 l. de R.	:	8512 as
1 gram.	:	18,827 grains	10 as	:	9 gr.
9 grains	:	10 as.	18,827 grains	:	1 grme.
8512 as	:	1 l. de R.	1000 gram.	:	1 kil.
	::	1 kil. : x		::	2,45758 : x
Rép. : $x = 2,45758$ (*a*)			Rép. : $x = 1$ kilogr.		

2e. *Règle.*			*Preuve.*		
1 l. de R.	:	8512 as	1 kilog.	:	1000 gram.
10 as	:	9 grains	1 gram.	:	18,827 grains
18,827 grains	:	1 gram.	9 grains	:	10 as
1000 gr.	:	1 kilog.	8512 as	:	1 l. de Rus.
	::	1 liv. : x		::	0 kil., 40691 : x
Rép. : $x = 0$ kil., 40691			Rép. : $x = 1$ liv. de Russie.		

S'il s'agissait de réduire une quantité quelconque de kilogr. en livres de Russie, ou de ces dernières en kilogrammes, il faudrait établir les mêmes règles conjointes, avec cette seule différence, que le nombre placé au-dessous du dernier conséquent de la première, exprimerait la quantité de kilogrammes que l'on veut réduire, au lieu de n'en exprimer

(*a*) On a ajouté à chaque résultat 1 unité décimale de plus, quoique le reste fût plus petit que le diviseur, parce qu'on doit trouver l'unité pour résultat de la preuve, et qu'on ne la trouverait pas si on abandonnait le reste. Le reste qu'on trouvera à la preuve proviendra donc de l'unité décimale ajoutée au résultat de la règle.

qu'un seul, et il en serait de même de la quantité des livres de Russie.

10e. EXEMPLE.

Application à la réduction des mesures linéaires d'un pays en celles de même genre d'un autre pays.

612. 1°. 100 aun. d'Amsterdam étant égales à 81 varres 40 centièmes de Cadix;

2°. 100 aunes de Paris étant égales à 140 varres 11 centièmes de Cadix;

3°. L'aune de Paris étant égale à 1 mètre, 18845 cent millièmes de mètres;

On demande : 1°. combien l'aune d'Amsterdam vaut de millimètres, et la preuve; 2°. combien le mètre vaut d'aunes d'Amsterdam ou de parties décimales de cette aune et la preuve?

1ère. *Règle.*		*Preuve.*	
100$^{aun.\ d'Ams.}$	: 81$^{var.}$, 40	1$^{m.}$, 18845 :	1 aun. Par.
140$^{var.}$ 11$^{cent.}$	: 100 aune Paris	100 aun. Par. :	140$^{var.}$, 11
1 aune	: 1$^{m.}$, 18845	81$^{var.}$, 40	: 100 aunes
	:: 1$^{aune\ d'Amst.}$ $= x$		:: 0$^{m.}$, 690 : x
Rép. : $x =$ 0 mèt., 690		Rép. : $x =$, aune	

2°. *Règle.*		*Preuve.*	
1$^{m.}$, 18845 :	1 aune Paris	100 aunes	: 81$^{var.}$, 40
100 aun. Par. :	140$^{var.}$, 11	140$^{var.}$, 11	: 100 aunes
81$^{var.}$, 40	: 100 aunes	1 aune	: 11$^{m.}$, 18845
	:: 1$^{m.}$: x		:: 0$^{aun.}$, 690 : x
Rép. : $x =$ 0$^{aun.}$, 690		Rép. : $x =$ 1 mètre	

Dorénavant nous ne placerons plus les preuves à côté des règles; l'élève pourra faire ces preuves lui-même.

11e. EXEMPLE.

613. *Application à la réduction des mesures de capacité d'un pays en mesures du même genre d'un autre pays.*

1°. Sachant que 51 fanegas 88 centièmes, mesures d'Espagne, valent 1 last d'Amst.;

2°. Que le last d'Amsterdam contient 147120 pouces cubes;

3°. Que l'hectolitre contient 2 pieds cubes 9174 dix-millièmes;

4°. Que le pied cube contient 1728 pouces cubes;

On demande : 1.° combien 1 fanegas d'Espagne contient d'hectolitres et de parties décimales de l'hectolitre; 2°. combien l'hectolitre contient de parties décimales du fanegas?

1ère. *Règle.*		2e. *Règle.*	
$51^{fanegas}, 88$	: 1 last	1 hect.	: 2,9174 pi. c.
1 last	: 147120 po. c.	1 pi. c.	: 1728 po. c.
1728 po. cub.	: 1 pied cube	147120 po. c.	: 1 last
$2,9174^{pi. cub.}$	: 1 hectolitre	1 last	: $51^{faneg.}, 88$
	:: 1 fanegas : x		:: $1^{hect.}$: x
Rép. : $x =$		Rép. : $x =$	

614. En général, de quelque nature que soient les deux mesures que l'on veut comparer numériquement, lorsqu'on connaît le rapport de l'une des deux à une troisième, de celle-ci à une quatrième, et ainsi de suite jusqu'à une dernière; et lorsqu'on connaît le rapport de celle-ci avec la seconde des deux mesures dont on veut déterminer le rapport proportionnellement à ces différens rapports connus, on peut le déterminer sans difficulté par la règle conjointe qui compose un seul rapport de tous les rapports simples donnés.

Tous les changes indirects, la plupart des changes étrangers, toutes les réductions de mesures quelconques les unes dans les autres, par le moyen d'autant de rapports intermédiaires que l'on voudra, ne sont autre chose qu'une seule et

même règle, la règle conjointe (584). Toutes les réductions de deux mesures quelconques, dont le rapport simple est connu, ne sont autre chose qu'une seule et même règle, la règle de trois (*a*).

Ces réductions se réduisent à une simple multiplication ou division, lorsqu'on connaît le rapport mutuel de l'unité des mesures que l'on compare (*b*).

Application de la règle conjointe au calcul de l'intérêt composé ou de l'intérêt de l'intérêt.

615. Le seul cas où la loi admet la demande des intérêts des intérêts, est celui où il s'agit des deniers des mineurs.

Faute par les tuteurs d'avoir employé dans les six mois du jours qu'ils les ont reçus, les deniers des mineurs, ceux-ci peuvent réclamer légitimement les intérêts des intérêts des fonds demeurés oisifs.

Toutes les questions relatives aux intérêts composés doivent être résolues par la règle conjointe.

12e. EXEMPLE.

Un tuteur doit à ses pupilles une somme de 2000 fr. avec les intérêts des intérêts de trois ans au denier 10. On demande quelle est la somme qu'il doit leur payer?

(*a*) Voyez dans le chapitre de la règle de trois depuis le numéro (392) jusqu'au numéro (429).

(*b*) Le kilogramme, nouveau poids français, vaut 18827 grains de l'ancien poids de marc; l'ancienne livre poids de marc vaut 9216 grains du même poids; le kilogramme est donc à la livre poids de marc dans le rapport inverse de 18827 à 9216, lequel peut être exprimé ainsi $\frac{9216}{18827}$. Donc, pour convertir des livres poids de marc en kilogramme, il ne s'agit que de multiplier la quantité de livres proposée par $\frac{9216}{18827}$; le résultat de l'opération sera la quantité inconnue de kilogrammes. La livre est au contraire au kilogramme dans le rapport inverse de 9216 à 18827, qu'on peut exprimer ainsi : $\frac{18827}{9216}$. Donc, pour réduire des kilogrammes en livres, il ne s'agit que de multiplier par $\frac{18827}{9216}$, la quantité de livres proposée.

Règle.		*Preuve.*	
10 :	11	11 :	10
10 :	11	11 :	10
10 :	11	11 :	10
:: 2000 : x.		:: 2662 : x	
Rép. : $x = 2662$.		Rép. : $x = 2000$.	

En effet, il est évident qu'à la fin de la première année 10 f. en vaudront 11 avec l'intérêt ; 10 f. ; en vaudront encore 11 à la fin de la seconde ; et ainsi de suite pour chaque année. Conséquemment la somme due à la fin de la première année, sera les $\frac{11}{10}$ de celle due au commencement ; la somme due la seconde sera également le $\frac{11}{10}$ de celle due à fin de la première, et par conséquent sera les $\frac{11}{10}$ des $\frac{11}{10}$ de celle due au commencementde la première ; enfin la somme due à l'expiration de la troisième année sera les $\frac{11}{10}$ de celle due à la seconde et par conséquent les $\frac{11}{10}$ des $\frac{11}{10}$ des $\frac{11}{10}$ de celle due en principe, c'est-à-dire, de 2000. Or les $\frac{11}{10}$ des $\frac{11}{10}$ des $\frac{11}{10}$ de 2000 ou de : $\frac{2000}{1} = \frac{11 \times 11 \times 11 \times 2000}{10 \times 10 \times 10 \times 1} = 2662$.

13ᵉ. EXEMPLE.

616. Un tuteur doit à son pupille 100,000 fr. dont il a eu l'administration pendant 6 ans. On demande ce qu'il doit lui compter, en y comprenant les intérêts des intérêts au denier 20?

Règle.

20 : 21
20 : 21
20 : 21
20 : 21
20 : 21
20 : 21
:: 100000 : x.

Rép. : $x = 134009$ fr. $\frac{351}{640}$.

14e. EXEMPLE.

617. On demande quelle est la somme que doit un tuteur pour un capital de 1000 liv. tournois, et les intérêts des intérêts de 3 ans 7 mois et quinze jours au denier 20?

$$\begin{array}{l} 20 : 21 \\ 20 : 21 \\ 20 : 21 \\ \quad :: 1000 : x. \end{array}$$

Rép. : $x = 1157$ liv. 16 s. 3 d.

Il est évident que le tuteur devra au bout de trois ans 1157 l. 16 s. 3 d., et qu'il devrait en outre la vingtième partie de cette somme s'il l'avait gardée un an de plus; or, la vingtième partie de 1157 l. 16 s. 3 d. est 57 liv. 17 s. 10 d.: mais il n'a pas gardé le capital pendant toute la durée de la quatrième année, il faut donc prendre sur l'intérêt de cette quatrième année, c'est-à-dire, sur 57 liv. 17 s. 10 d., l'intérêt qui revient au pupille pour 7 mois et demi seulement; ce qui donnera 36 liv. 3 s. 8 den., qu'il faut ajouter à ce que le tuteur doit à la fin de la troisième année, c'est-à-dire, à 1157 liv. 16 s. 3 den. Conséquemment le tuteur doit au pupille 1193 l. 19 s. 11 d.

15e. EXEMPLE.

618. On demande quelle somme il faudrait prêter pour recevoir au bout de trois ans 2662 liv., tant pour le capital que pour l'intérêt de l'intérêt au denier 10?

$$\begin{array}{l} 11 : 10 \\ 11 : 10 \\ 11 : 10 \\ \quad :: 2662 : x. \end{array}$$

Rép. : $x = 2000$.

En effet, pour les 11 liv. que le débiteur remboursera à la fin de la première année, il ne faut lui en prêter que 10; ainsi ce qu'on lui prête ne doit être que les $\frac{10}{11}$ de ce qu'il

remboursera à la fin de la première année; or la somme dont il jouira la seconde ne sera aussi que les $\frac{10}{11}$ de ce qu'il remboursera quand elle sera expirée, et ce dont il jouira la troisième ne sera aussi que les $\frac{10}{11}$ de ce qu'il remboursera à la fin. Conséquemment ce qu'il faut lui prêter, ne doit être que les $\frac{10}{11}$ des $\frac{10}{11}$ des $\frac{10}{11}$ de $2662 = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 2662}{11 \times 11 \times 11 \times 1} = 2000$.

De la règle des parties proportionnelles dite de compagnie ou de société.

619. Cette règle est ainsi nommée, parce qu'elle a pour objet *de partager un nombre proposé en parties qui aient entre elles des rapports donnés.*

620. *Dans toute proportion la somme des deux antécédens contient la somme des deux conséquens, ou est contenue en elle, comme un des antécédens contient son conséquent ou est contenu en lui.*

Par exemple, dans la proportion : $12 : 3 :: 24 : 6$,

$12 + 24 : 3 + 6 :: 24 : 6$, ce qui est évident. Mais pour s'en convaincre généralement, il n'y a qu'à faire attention que si le premier antécédent contient deux fois par exemple le second, ce dernier sera contenu trois fois dans la somme des deux antecédens, et par la même raison la somme des conséquens contiendra trois fois le second conséquent, la somme des antécédens contiendra donc celle des conséquens comme le triple de l'un des antécédens contient celui de son conséquent (378), ou comme un des antécédens contient son conséquent.

On prouverait de même que la différence des antécédens est à la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

Or il est évident que cette proposition revient à celle-ci: Si on a deux rapports égaux, par exemple,

Celui de. . . . . 12 : 3
Et celui de. . . . . 24 : 6

36 : 9

On aura encore le même rapport en ajoutant antécédent à antécédent, et conséquent à conséquent. Conséquemment :

621. *Si l'on a plusieurs rapports égaux, la somme de tous les antécédens est à la somme de tous les conséquens, comme l'un des antécédens est à son conséquent.*

Par exemple, si on a les rapports égaux 12 : 3 :: 24 : 6 :: 8 : 2, on peut dire que 12 + 24 + 8 : 3 + 6 + 2, comme 12 : 3, ou comme 24 : 6, etc.

Car après avoir ajouté entre eux les antécédens de deux premiers rapports, et leurs conséquens aussi entre eux, le nouveau rapport qui, selon ce qu'on vient de voir, sera le même que chacun des deux premiers, sera aussi le même que le troisième; par conséquent on pourra l'ajouter de même avec celui-ci, et il en résultera encore le même rapport, et ainsi de suite.

On en a conclu la règle des parties proportionnelles ou de compagnie.

1er. EXEMPLE.

622. Supposons qu'il s'agisse de partager 480 fr. en trois parties, qui aient entre elles les mêmes rapports que les nombres 4, 3, 2, et pour simplifier les expressions, représentons la première des trois parties inconnues par *a*, la seconde par *b*, la troisième par *c*, comme on représente le troisième terme inconnu d'une proportion par *x* (*a*).

L'énoncé de la question fournit ces proportions :

$4 : 3 :: a : b$ C'est-à-dire (*b*);

$4 : a :: 2 : c$ id. (*c*),

(*a*) Nous prévenons expressément qu'il ne s'agit pas ici d'algèbre : représenter les parties inconnues par des lettres qui servent à les distinguer les unes des autres, c'est simplifier le raisonnement, et non faire une opération algébrique.

(*b*) La première partie connue est à la seconde, comme la première partie inconnue est à la seconde.

(*c*) La première partie connue est à la troisième, comme la première partie inconnue est à la troisième.

Ou en échangeant la place des deux termes moyens, on a les deux proportions suivantes :

$4 : a :: 3 : b$ C'est-à-dire (*a*) ;
$4 : a :: 2 : c$ id. (*b*).

De sorte qu'elles présentent ces trois rapports égaux :

$4 : a :: 3 : b :: 2 : c$; c'est-à-dire :

La première partie connue est à la première partie inconnue, comme la deuxième connue est à la deuxième inconnue, comme la troisième connue est à la troisième inconnue.

Or on a vu (621) que la somme des antécédens de plusieurs rapports égaux est à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent. On peut donc dire ici que la somme 9 des trois parties connues qui sont proportionnelles à celles que l'on cherche, est à la somme 480 de celles-ci (*c*) comme la première, la seconde ou la troisième des trois parties proportionnelles connues est à la première, à la seconde ou à la troisième des trois parties inconnues de 480. Conséquemment :

623. La règle qui a pour objet de partager un nombre en parties qui aient entre elles les mêmes rapports que différens nombres donnés, se réduit,

1°. A faire une totalité des parties proportionnelles connues, ou, en d'autres termes, des différens nombres donnés ;

2°. A faire autant de règles de trois qu'il y a de parties à trouver du nombre qu'on se propose de partager, et dont chacune aura pour premier terme la somme des parties propor-

---

(*a*) La première partie connue est à la première inconnue, comme la seconde connue est à la seconde inconnue.

(*b*) La première partie connue est à la première inconnue, comme la troisième connue est à la troisième inconnue.

(*c*) La somme des trois parties inconnues, représentées par a, b, c, n'est autre chose que 480, puisque ces trois parties réunies doivent être égales à 480, lorsqu'elles seront connues.

tionnelles connues, c'est-à-dire, des nombres donnés; pour second, le nombre que l'on se propose de partager (*a*), et pour troisième l'une des parties proportionnelles données, c'est-à-dire, l'un des nombres donnés.

Ainsi, dans la question proposée pour exemple, on aurait ces trois règles de trois à faire :

$$9 : 480 :: 4 : A = 213 \text{ f. } 33 \text{ c. } \tfrac{1}{3}$$
$$9 : 480 :: 3 : B = 160 \quad »$$
$$9 : 480 :: 2 : C = 106 \quad 66 \quad \tfrac{2}{3}$$
$$\overline{480 \text{ f.}}$$

dont on trouvera que les quatrièmes termes sont 213 fr. 33 c. $\frac{1}{3}$, 160 fr., et 106 fr. 66 cent. $\frac{2}{3}$, qui ont entre eux les mêmes rapports que 4, 3 et 2, ou les rapports demandés, et qui composent en effet le nombre 480.

624. On pourrait encore faire cette règle en considérant les nombres 4, 3 et 2, comme ceux des parts égales de 480 qui reviennent à trois associés différens. Ainsi, après avoir trouvé la somme des parts qui est 9, en divisant 480 par 9, le quotient 53 l. 6 s. 8 den. serait l'une de ces parts, et en multipliant le quotient par 4, on aurait 213 l. 6 s. 8 d. pour les quatre parts de l'un des associés; en multipliant par 3, on aurait 160 liv. pour les trois parts d'un autre; et enfin en le multipliant par 2, on aurait 106 liv. 13 s. 4 d. pour les deux parts du dernier, ce qui donnera les mêmes parties que l'opération précédente.

625. Si l'on proposait de partager 1308 fr. en trois parties, dont la première fût à la seconde :: 5 : 4, et dont la première fût à la troisième :: 7 : 3, on ne pourrait appliquer à cette question la règle précédente (623), qu'après avoir rendu la même dans chacun des deux rapports donnés la première partie proportionnelle des trois parts cherchées; ce qui s'exécute

(*a*) Qui n'est autre chose que la somme des parties inconnues, proportionnelles aux nombres donnés 4, 3 et 2.

facilement en multipliant les deux termes de chaque rapport par le premier terme de l'autre rapport. Ainsi les deux rapports 5 : 4, 7 : 3, seront ramenés à avoir un même premier terme en multipliant les deux termes du premier par 7 et les deux termes du second par 5, ce qui ne change pas le rapport (578), et donne les rapports 35 : 28 et 35 : 15; en sorte que la question se réduit à partager 1300 en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 35, 28 et 15, ce qui se fera exactement par la règle précédente (623).

626. Si l'on demandait de partager un nombre en 4 parties, dont la première fût à la seconde :: 5 : 4, la première à la troisième :: 9 : 5, et la première à la quatrième :: 7 : 3, on réduirait ces rappors à avoir un même premier terme, en multipliant les deux termes de chacun par le produit des premiers termes des deux autres. Ainsi dans cet exemple, on changerait ces trois rapports en ces trois autres égaux ou qui sont les mêmes 315 : 252, 315 : 175, 315 : 135; en sorte que la question se réduirait à partager le nombre proposé en quatre parties qui soient entre elles comme les nombres 315, 252, 175 et 135 (623).

La règle établie n°. (623) n'est autre chose que celle qu'on appelle dans la pratique *règle de compagnie.*

Règle de compagnie.

627. Lorsqu'il s'agit de partager un capital, un bénéfice ou une perte quelconque entre plusieurs associés ou intéressés, proportionnellement à leur mise :

1°. Faites un total de leurs mises;

2°. Ensuite, pour avoir la part qui revient à l'un des associés proportionnellement à sa mise, *faites une règle de trois qui aura pour premier terme le total des mises, pour second terme le nombre à partager, et pour troisième terme la mise de cet associé;* ce qui lui revient du nombre à partager sera le quatrième terme.

3°. Faites une semblable règle de trois pour avoir la part

de chaque associé, en observant dans la règle relative à chacun que *le total des mises doit être le premier terme; le nombre à partager le second;* et la mise particulière de celui des associés dont il s'agit de connaître la part du capital, du bénéfice ou de la perte, *le troisième terme;* sa part sera le quatrième.

Le total des parts trouvées par ces différentes règles de trois doit être égal au nombre à partager, si les opérations sont exactes.

2[e]. EXEMPLE.

628. On suppose que trois associés ont gagné 48000 liv.; on demande ce qui revient à chacun, en proportion de sa mise.

Le premier a mis.	12000 liv.
Le second.	15000
Le troisième.	13000
	40000 liv.

Proportion.

40000 l. :	48000 ::	12000 l. :	x	=	14400 l.
40000 :	48000 ::	15000 :	x	=	18000
40000 :	48000 ::	13000 :	x	=	15600
					48000 l.

Nous n'avons pas fait les opérations, parce qu'il ne s'agit que de multiplier le troisième terme par le second, et diviser le produit par le premier.

629. Pour abréger les opérations, on peut réduire les mises particulières à leur plus simple expression, en prenant des parties égales de toutes les mises des associés, lorsqu'on aperçoit que cela est possible sans reste, parce que la somme des mises, diminuant comme chacune de ces mises, compose toujours, avec chacune de celles-ci, le même rapport; ou encore, parce qu'elles seront en même rapport

entre elles, après ces changemens, comme auparavant. Ainsi les mises des trois associés ayant entre elles les mêmes rapports que 12000, 15000, 13000, ou que 12, 15, 13, on additionnera ces trois derniers nombres, dont la somme 40 compose le même rapport avec chacun d'eux que 40000, somme de 12000, 15000, 13000, avec chacun de ceux-ci, et on établira les proportions suivantes :

$$40 : 48000 :: 12 : x = 14400$$
$$40 : 48000 :: 15 : x = 18000$$
$$40 : 48000 :: 13 : x = 15600$$
$$\overline{48000}$$

Ou encore (378) les deux termes du premier rapport se réduiront, pour chacune de ces trois proportions, à ceux-ci : 1 : 1200; d'ailleurs, en prenant des parties égales sur le premier terme et sur l'un des deux autres, autant de fois qu'on le pourra sans reste, on obtiendra toujours les mêmes abréviations.

630. Si les trois associés, ayant fourni les mêmes mises, avaient perdu 48000 livres au lieu de les gagner, il faudrait établir les mêmes proportions (629) pour leur répartir cette perte en proportion de leur mise (628). Il en serait de même pour un capital, un héritage ou un fonds qui leur appartiendrait en commun : et qu'il s'agirait de leur partager.

3e. EXEMPLE.

631. Trois associés ont vendu 96000 liv. des marchandises qui leur coûtaient 72000 liv.; ils demandent ce qui revient à chacun pour sa part du profit, en proportion de sa mise.

Le premier a mis.	12000 liv.
Le second.	15000
Le troisième.	13000
	40000 liv.

Pour connaître le bénéfice total de cette opération de commerce, il ne s'agit que de soustraire le prix coûtant des marchandises de celui qu'on en a obtenu; c'est-à-dire, 72000 liv. de 96000 liv.; le reste 24000 liv. est le bénéfice qu'il faut partager entre ces trois associés (628).

632. S'ils avaient au contratre vendu 72000 liv. ce qui leur coûtait 96000 liv., il faudrait soustraire le prix qu'ils auraient retiré de leur marchandise de celui qu'elle leur aurait coûté; c'est-à-dire, 72000 liv. de 96000 liv., et le reste 24000 liv. serait la perte à partager entre les trois associés, comme on l'a déjà indiqué (631).

Proportions.

40000 l. : 24000 l. :: 12000 l. : x = 7200 l.
40000 : 24000 :: 15000 : x = 9000
40000 : 24000 :: 13000 : x = 7800

24000

4e. EXEMPLE.

633. Trois négocians ont fait en société une opération qui a produit 12000 liv. de bénéfice; on demande ce qui revient à chacun, en proportion de sa mise et du temps qu'il l'a laissée à la masse.

Le premier a mis	5000 l.	qu'il a retirées au bout de	7 mois.
Le second	7000	id.	6
Le troisième	3000	id.	10

Lorsque les associés ont laissé leur mise un temps égal chacun, il ne s'agit que de leur partager le bénéfice proposé en proportion de leur mise, comme on l'a déjà indiqué (628).

Lorsqu'ils l'ont laissée des temps différens, et qu'on doit leur partager le bénéfice en proportion de leur mise et du temps qu'ils l'ont laissée à la masse, et par conséquent de l'intérêt qu'elle devait rapporter, il faut multiplier chaque mise

par la quantité des années, des mois ou des jours qu'elle est restée à la masse, parce qu'il est évident, par exemple, que, dans la question qui vient d'être proposée, la mise de 5000 l. a dû produire pendant 7 mois le même intérêt que 7 fois 5000 liv., ou 35000 liv., pendant 1 mois; que la mise de 7000 liv. a dû produire pendant 6 mois le même intérêt que 6 fois 7000 liv., ou que 42000 liv. pendant 1 mois; enfin que 3000 liv. a dû produire le même intérêt pendant 10 mois que 10 fois 3000 liv., ou 30000 liv. pendant 1 mois : ce qui réduit la question à partager 12000 liv. entre trois associés dont les mises suivent :

OPÉRATION.

Mise du premier	5000 l.	×	7 mois	=	35000 liv.
— second	7000	×	6	=	42000
— troisième	3000	×	10	=	30000
					107000 liv.

Proportions.

(693) 107000 : 12000 :: 35000 :	3925 l.	4 s.	8 d.	$\frac{3}{107}$
107000 : 12000 :: 42000 :	4710	5	7	$\frac{3}{107}$
107000 : 12000 :: 30000 :	3364	9	8	$\frac{3}{107}$
	12000 liv.			

5e. EXEMPLE.

634. Un débiteur, qui ne possède que 2058 l. 19 s. 8 d., demande combien il peut donner à chacun de ses créanciers, en proportion de la créance de chacun.

Il est dû au premier	2248 l.	7 s.	» d.
au second	2030	8	6
au troisième	1426	10	6
au quatrième	1000	»	»
	6705 l.	6 s.	»

Il faut regarder ces créanciers comme des associés qui doivent partager 2058 liv. 19 s. 8 d., en proportion de leurs mises (628).

Proportions.

6705 l. 6 s.	:	2058 l. 19 s. 8 d.	::	2248 l.	7 s.	» d.	:	x
6705 6	:	2058 19 8	::	2030	8	6	:	x
6705 6	:	2058 19 8	::	1426	10	6	:	x
6705 6	:	2058 19 8	::	1000	»	»	:	x

Lorsqu'il y a aux mises des sous et des deniers, ou toute autre subdivision de l'unité, et qu'on ne veut pas les abandonner, ce qui ne donnerait pas une grande différence, et ce qui n'est d'aucune considération dans la pratique, il faut réduire toutes les mises en deniers, ou en unités de la plus petite espèce de toutes celles qui les composent; la somme des mises ainsi réduites sera le premier terme de la proportion qu'il s'agit de faire, pour avoir la part d'un des associés; le nombre à partager en sera le second terme; la mise ainsi réduite de cet associé en sera le troisième; et sa part du nombre à partager en sera le quatrième terme. Il en est de même pour chacun des associés. Par exemple, dans le dernier problème proposé, pour avoir la part du premier créancier, il faut établir cette proportion (*a*) :

$$1609722 : 2058 \text{ l. } 19 \text{ s. } 8 \text{ d. } :: 539604 : x$$

Et ainsi de suite pour les autres.

Pour abréger cette opération on peut, après avoir réduit toutes les mises à leur plus petite espèce, comme on vient de l'indiquer, chercher combien il reviendrait de ce nombre à partager, pour une mise de 100000 unités de même espèce que

(*a*) Dans ce problème, 6705 liv. 6 s., ou la somme des mises réduite en deniers, est 1609722; la mise du premier associé, réduite en deniers, est 539604.

celles dans lesquelles les mises des créanciers ont été réduites ; ce que l'on trouve facilement en établissant une proportion dont la somme totale des mises, réduites à leur plus petite espèce, est le premier terme, le nombre à partager le second, 100000 le troisième. Il ne s'agit plus ensuite que de chercher combien il revient sur le nombre à partager à chaque créancier, pour sa mise réduite à sa plus petite espèce, en proportion de ce qui lui revient pour une mise de 100000 unités de même espèce ; ainsi, en reprenant le dernier exemple proposé, pour avoir ce qui revient pour 100000, il faut établir cette proportion : 1609722 d. (*a*) : 2058 l. 19 s. 8 d. somme à partager :: 100000 : x = 127 l. 18 s.

Ainsi, au lieu des quatre proportions ci-dessus, on a les proportions suivantes pour connaître la part que chacun des quatre créanciers doit avoir du nombre à partager :

100000	:	127 l.	18 s.	::	539604	: x =	690 l.	3 s.	» d.
100000	:	127	18	::	487302	: x =	623	5	2
100000	:	127	18	::	342366	: x =	437	17	8
100000	:	127	18	::	240000	: x =	306	19	2

635. Mais les négocians abrègent ordinairement de beaucoup cette opération, en négligeant les sous et deniers ou les centimes, tant des créances que des nombres à partager, et en cherchant combien il revient pour 100 liv. sur le nombre à partager, à proportion de la mise totale des créances et du nombre à partager. La question se réduit ensuite à chercher combien il revient à chaque créancier en particulier sur sa créance, à proportion de ce qui lui reviendrait, si elle n'était que de 100 liv.

6e. EXEMPLE.

Un négociant failli doit 695745 liv. 19 s. 6 den., et ne

(*a*) Somme des mises réduites en deniers.

possède que 196000 liv. 18 s. 9 den. ; on demande combien il peut donner à chacun de ses créanciers, en proportion.

Il est dû au premier	6954 l.	5 s.	» d.
au second	3454	15	»
au troisième	7964	7	»
au quatrième	22954	13	»
au cinquième	654417	19	6
	695745 l.	19 s.	6 d.

La question se réduit à celle-ci : puisque ce failli ne peut donner, sur 695745 liv. 19 s. 6 den., que les 196000 liv. 18 s. 9 den. qu'il possède ; combien peut-il donner à proportion sur 100 liv.

Ainsi, en négligeant les sous et les deniers ; on aurait cette proportion :

$$695745 : 196000 :: 100 : x = 28 \text{ l. } 3 \text{ s. } 5 \text{ d. } \tfrac{68055}{695745}$$

Porportions.

100 : 28 l.	3 s.	5 d.	::	6954 : x =	1959 liv.
100 : 28	3	5	::	3454 : x =	973
100 : 28	3	5	::	7964 : x =	2244
100 : 28	3	5	::	22954 : x =	6466
100 : 28	3	5	::	654417 : x =	184355
					195997 liv.
DIFFÉRENCE.......					3

Comme dans tous les cas des faillites un pour cent de plus ou de moins est peu important pour les créanciers ; quand on a trouvé la quantité de livres ou de francs que le failli peut donner pour 100 liv., on lui abandonne le reste sans chercher les sous et les centimes, etc., qu'il pourrait donner en outre. Ainsi dans la pratique on ne demanderait au failli que 28 pour 100 ; le second terme de chaque proportion serait donc 28 liv.

7e. EXEMPLE.

636. Six libraires ont fait l'entreprise de l'édition d'un ouvrage montant à 48000 liv. ; que doit payer chacun pour sa part, à proportion de l'intérêt qu'il a pris ?

Le premier est intéressé pour $\frac{1}{3}$
Le second pour. . . . . $\frac{1}{4}$
Le troisième pour. . . . . . $\frac{1}{6}$
Le quatrième pour. . . . . . $\frac{1}{8}$
Le cinquième. . . . . $\frac{3}{32}$
Le sixième pour. . . . . $\frac{1}{32}$

Le premier intéressé doit payer le tiers des 48000 liv. que doit coûter l'édition ; le second le quart ; le troisième doit en payer la sixième partie ; le quatrième n'en doit payer que la huitième partie ; le cinquième, que trois fois la trente-deuxieme partie ; et le dernier, que la trente-deuxième partie seulement ; et ces divers intéressés doivent se partager la totalité des exemplaires dans les mêmes proportions. Ainsi le premier aura le tiers de la totalité des exemplaires ; le second le quart ; le troisième en aura la sixième partie ; et ainsi de suite.

8e. EXEMPLE.

637. Quatre négocians ont fait une entreprise qui a duré trois ans, au bout desquels ils ont eu 36000 l. de bénéfice ; savoir ce qui doit revenir à chacun, suivant son intérêt.

Le premier a mis 5000 l. ; et, au bout de 12 mois, il a remis 3000 liv. :

Le second a mis 4000 liv., et, au bout de 6 mois, il a remis 6000 liv.

Le troisième a mis 3000 l., et, au bout de 15 mois, il a remis 6000 liv.

Le quatrième a mis 12000 liv., et au bout de 8 mois, il a retiré 4000 liv.

Le premier négociant a laissé sa mise de 5000 liv. 12 mois, donc cette mise doit être multipliée par 12, ce qui donne 60000 l. pour un mois (633); au bout des 12 mois il a ajouté 3000 liv., c'est donc 8000 l. que ce premier négociant a laissées en société pour le reste du temps; c'est-à-dire, pour 24 mois, puisque la société en a duré 36 : c'est donc 8000 l. à multiplier par 24, ce qui donne 192000 l. qui, réunies aux 60000, font 252000, mise totale du premier négociant, que l'on peut supposer celle qu'il a fournie pendant un mois; ci 252000 l.

Même raisonnement pour le second, dont la mise d'nn mois est. 324000

Même raisonnement pour le troisième, dont la mise d'un mois est. 234000

Le quatrième a mis 12000 l. pendant 8 mois, ce qui fait 96000 pour un mois; au bout de 8 mois il a retiré 4000 l., il n'a donc laissé que 8000 l. le reste du temps, c'est-à-dire 28 mois; ce qui fait 224000 liv. pour un mois qui, jointes à 96000 l. déjà calculées, font, ci. 320000

1130000 l.

1130000 liv. représente la mise totale des associés pendant un temps égal, c'est-à-dire, pendant un mois; 252000, 324000, 234000 et 320000, représentent la mise du premier, du second, du troisième et du quatrième intéressés pendant le même temps. Il faut leur partager les 36,000 l. de bénéfice à proportion, suivant la règle déjà indiquée (627).

$$1130000 \text{ l.} : 36000 \text{ l.} :: 252000 \text{ l.} : x.$$

Et ainsi de suite pour chacun des autres associés, pour lesquels on établira la même proportion, avec cette seule différence que 324000 liv. sera le troisième terme de la proportion éta-

blie pour connaître la part du second ; 234000 l. sera le troisième terme de la proportion établie pour connaître la part du troisième ; et que 320000 liv. sera le troisième terme de celle établie pour trouver la part du quatrième.

9e. EXEMPLE.

638. Trois négocians ont fait une entreprise dans laquelle ils ont gagné 24000 liv. ; on demande ce qui revient à chacun en proportion de sa mise, la société accordant au troisième, qui a été chargé de l'achat et de la vente, 4 pour 100 de commission outre sa part de bénéfice comme associé.

Le premier a mis.	19500 l.
Le second.	18700
Le troisième.	15800
	54000 l.

Avant de faire le partage du gain entre les trois associés, il faut prélever sur les 24000 l. à partager les 4 p. 100 qui reviennent au troisième associé : or ces p. 100 montent à 960, et 24000 moins 960 se réduisent à 23040 ; qu'il faut partager entre les trois associés en proportion de leur mise (627).

PROBLÈME.

639. On demande à un canton 48000 liv. d'augmentation de son imposition ; combien chaque commune doit-elle payer en proportion de son imposition ?

La première a payé.	4000 l.
La seconde.	6000
La troisième.	9000
La quatrième.	12000
La cinquième.	18000
	49000 liv.

On fait ces règles comme celles de compagnie.

Pour le premier,	les 5 s. p. liv. du bénéfice,		12000 l.
le second,	les 6 s.	id.	14400
le troisième,	les 4 s.	id.	9600
le quatrième,	les 3 s.	id.	7200
le cinquième,	les 2 s.	id.	4800
			48000 l.

11e. EXEMPLE.

642. Quatre fermiers, deux directeurs et six commis ont fait une société, à condition que chaque directeur aura le quart de la part d'un des fermiers, et que chaque commis aura le tiers de la part d'un des directeurs : ils ont gagné 144000 livres ; on demande ce qui revient à chacun.

Pour résoudre ce problème, supposons que l'un des commis ait une part représentée par 1 ; l'un des directeurs, qui doit avoir trois fois plus, aura 3 ; et l'un des fermiers, qui doit avoir 4 fois plus qu'un directeur, aura 12. Conséquemment :

6 commis auront ensemble	1 part $\times$ 6 $=$	6 parts.
2 directeurs.	3 parts $\times$ 2 $=$	6
4 fermiers.	12 parts $\times$ 4 $=$	48
	Total.	60 parts.

Alors on peut considérer 60 comme le fonds de la société, 12 comme la mise de chaque fermier, 3 comme celle de chaque directeur, 1 comme celle de chaque commis ; et on peut chercher en proportion la part qui reviendra des 144000 liv. à chacun des intéressés, selon la règle établie (627).

Mais, en divisant simplement le nombre à partager, c'est-à-dire 144000 liv., par 60, on aura 2400 liv. pour le prix d'une part. Conséquemment :

6 commis auront ensemble	2400 $\times$ 6 $=$	14400
2 directeurs auront ensemble	2400 $\times$ 6 $=$	14400
4 fermiers auront ensemble	2400 $\times$ 48 $=$	115200
		144000

D'où il suit qu'en général :

643. *Après avoir déterminé le nombre des parts qui reviennent à tous les intéressés, selon l'esprit de la question, on aura l'une des parts du gain proposé en divisant ce gain par le nombre qui exprime la totalité des parts, et on aura ensuite ce qui revient à l'un des intéressés, en multipliant le nombre qui exprime une part du gain par la quantité des parts qui reviennent à cet intéressé, et ainsi de suite pour chacun des autres.*

12e. EXEMPLE.

644. Un corsaire a fait pour 900000 liv. de prises; on demande ce qui revient à chaque homme de l'équipage, après que l'armateur a prélevé d'abord 5 p. 100 pour sa commission sur le total, et la moitié du montant des prises qui revient aux actionnaires.

Composition de l'équipage.

1	capitaine qui doit avoir		12 parts.
2	seconds chacun. . .	8 parts	16
3	lieutenans.	6	18
4	sous-lieutenans. . .	4	16
2	timoniers.	3	6
1	chirurgien.		6
1	écrivain.		6
1	cuisinier.		1
20	matelots chacun. . .	$1\frac{1}{2}$	30
12	novices.	$\frac{3}{4}$	9
			120 parts.

Chercher d'abord les 5 p. $\frac{0}{0}$ qui reviennent à l'armateur sur 900000 liv. ; ces 5 pour $\frac{0}{0}$ montent à 45000 (461), qui, étant ôtées du montant des prises, en réduisent le produit à 855000, dont la moitié, qui est 427500, doit être partagée à

l'équipage; or, en divisant 427500 par 120, nombre total des parts, on aura le montant de l'une de ces parts, lequel montant est 3562 l. 10 s.; et, en multipliant 3562 liv. 10 s. par le nombre des parts ou par la fraction de part qui revient à chaque homme de l'équipage, vous aurez ce qui revient à chacun. L'addition de ce qui revient à tous les intéressés prouve l'exactitude de l'opération, lorsque la somme est égale à celle appartenant à l'équipage, et qu'il s'agit de lui distribuer.

Le nombre des parts ou 120 pourrait également être considéré comme le fonds d'une société, 427500 comme le gain à partager; et le nombre des parts qui reviennent à chaque associé comme la mise de chacun en particulier; et on pourrait opérer selon la règle établie (627).

13e. EXEMPLE.

645. Un homme laisse par testament 480000 liv. à trois neveux, à condition qu'ils auront davantage à proportion qu'ils seront moins âgés. Le premier a 30 ans, le second 25, et le troisième 20; on demande ce qui revient à chacun.

Selon l'intention du testateur, celui des neveux qui a 30 ans ne doit avoir que $\frac{1}{30}$ de ce qu'il aurait eu s'il n'avait qu'un an; celui qui en a 25 ne doit avoir que $\frac{1}{25}$ de ce qu'il aurait eu s'il n'avait qu'un an; et le dernier ne doit avoir que $\frac{1}{20}$ de ce qu'il aurait eu dans le même cas. On peut donc considérer les parts des trois neveux comme le $\frac{1}{30} + \frac{1}{25} + \frac{1}{20}$ de ce qu'ils auraient eu s'ils n'avaient eu qu'un an, et leurs parts respectives comme étant entre elles dans les rapports de $\frac{1}{30}, \frac{1}{25}, \frac{1}{20}$.

	300 D. C.
$\frac{1}{30}$	10
$\frac{1}{25}$	12
$\frac{1}{20}$	15
	37

Or, en réduisant ces fractions à un même dénominateur, et en supprimant le dénominateur de chacune, ce qui est les multiplier par ce même dénominateur, et ce qui ne change pas leur rapport mutuel, il est évident que les parts des trois neveux sont dans le rapport des nombres 10, 12 et 15. Il faut donc opérer selon la règle établie (627).

14e. EXEMPLE.

646. Les voyageurs d'une maison de commerce de Bordeaux ont trouvé, l'un à Paris, un intéressé de $\frac{1}{2}$ à un armement fait par cette maison, l'autre à Hambourg, un intéressé de $\frac{1}{3}$ l'autre à Amsterdam, de $\frac{1}{4}$; un dernier à Londres, de $\frac{1}{5}$, et la maison a réservé $\frac{1}{5}$; l'armement étant de 600000 l., on demande ce que chaque intéressé doit payer pour sa mise de fonds à l'armement.

60 D. C.

$\frac{1}{2}$	30
$\frac{1}{3}$	20
$\frac{1}{4}$	15
$\frac{1}{5}$	12
$\frac{1}{5}$	12
	89

Les parts des intéressés sont entre elles dans les rapports de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{5}$; or, en réduisant ces fractions à un même denominateur, et en supprimant le dénominateur de chacune, ce qui est les multiplier toutes par ce même dénominateur, et ce qui ne change pas leur rapport mutuel, il est évident que les parts que les intéressés doivent payer des 600000 liv., employées à l'armement proposé, sont dans les rapports des nombres 30, 20, 15, 12 et 12; et que la question se réduit à partager 600000 liv. dans des parties qui aient entre elles les mêmes rapports que les nombres 30, 20, 15, 12 et 12,

dont la somme est 89; il faut donc opérer selon la règle établie (623)

Proportion.

$89 : 600000 :: 30 : x$
$89 : 600000 :: 20 : x$
$89 : 600000 :: 15 : x$
$89 : 600000 :: 12 : x$
$89 : 600000 :: 12 : x$

15e. EXEMPLE.

647. Un négociant laisse à ses associés un capital de 600000 liv. qu'il possède; savoir : à Jean la $\frac{1}{2}$, à Pierre le $\frac{1}{3}$, à Jacques le $\frac{1}{4}$, à Jérôme le $\frac{1}{5}$, et à Baptiste le $\frac{1}{5}$; on demande la part de chacun selon la volonté du testateur.

Ce problème est le même que le précédent (646).

16. EXEMPLE.

648. Quatre hommes ont une somme à partager, à condition que le premier en aura le $\frac{1}{4}$, le second le $\frac{1}{3}$, le troisième le $\frac{1}{12}$, et le quatrième le restant, qui est 32000 liv.; on demande quelle est cette somme, et la part de chaque homme.

	12 D. C.
$\frac{1}{4}$	3
$\frac{1}{3}$	4
$\frac{1}{12}$	1
	8

Il est évident que le $\frac{1}{4}$, le $\frac{1}{3}$ et le $\frac{1}{12}$ font ensemble $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, et par conséquent que les 32000 liv. qui reviennent au quatrième sont le tiers de la somme à partager, qui est inconnue; qu'ainsi 32000 liv. est à la somme à partager comme $\frac{1}{3}$ est à 1.

On établira donc cette proportion :

$\frac{1}{3} : 1 :: 32000 : x.$ Rép. : 96000 liv.

ou (349 et 660) $1 : 3 :: 32000 : x.$

Le premier aura le $\frac{1}{4}$ de 96000 liv.	24000 liv.
Le second le $\frac{1}{3}$.	32000
Le troisieme le $\frac{1}{12}$.	8000
Le dernier aura le reste.	32000
	96000 liv.

17ᵉ. EXEMPLE.

649. Un négociant lègue son bien à quatre amis, et donne au premier $\frac{1}{4}$ de son bien, au second le $\frac{1}{3}$, au troisième le $\frac{1}{12}$, et au quatrième le restant, qui est de 32000 liv. ; on demande quel est le bien du défunt et la part de chacun.

Cette question est la même que la précédente (648).

18ᵉ. EXEMPLE.

650. On demande de trouver un nombre dont le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ et les $\frac{3}{7}$ fassent 808.

	105 D. C.
$\frac{1}{3}$	35
$\frac{1}{5}$	21
$\frac{3}{7}$	45
	101

Les parts du nombre que l'on cherche sont entre elles dans les mêmes rapports que les fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{7}$; donc en réduisant ces fractions à un même dénominateur, et en supprimant le dénominateur de chacune, ce qui ne change pas leur rapport mutuel, il est évident que les parts du nombre que l'on cherche sont entre elles dans les rapports des nombres 35, 21 et 45, dont la somme est 101 ; et que 101 est composé des parties de 105, de la même manière que le nombre 808 est com-

posé de celles du nombre que l'on cherche ; donc ce dernier doit être à 808 comme 105 est à 101, et réciproquement 808 doit être au nombre inconnu comme 101 est à 105. Le nombre inconnu doit donc être le quatrième terme d'une proportion qui commencerait par ces trois-ci :

$101 : 105 :: 108 : x$ Rép. 840 liv.

Ce quatrième terme est 840 liv., dont le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ et les $\frac{3}{7}$ s'élèvent à 808 ; donc ce dernier nombre renferme en effet le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ et les $\frac{3}{7}$ de 840 qui était le nombre inconnu.

651. Les derniers problèmes proposés sont rangés par certains arithméticiens parmi ceux qu'ils proposent sur ce qu'ils appellent la règle de fausse position. Mais comme il est évident qu'on peut les réduire sans faire aucune supposition étrangère aux données qu'ils renferment, ils ne dépendent pas de cette règle.

De la règle de fausse position.

652 On l'applique le plus souvent à résoudre des questions qui appartiennent à la règle de société, dont elle diffère seulement en ce que, pour avoir les parties proportionnelles qui ne sont qu'indiquées par l'énoncé de la question, elle en suppose une qu'elle détermine arbitrairement et y subordonne les autres conformément à la question, ce qui donne les parties proportionnelles à celle que l'on cherche.

19e. EXEMPLE.

Partager 1280 entre trois personnes, dont la seconde ait 4 fois autant que la première, et la troisième 2 fois et $\frac{1}{3}$ autant que les deux autres ensemble.

Je prends arbitrairement, pour représenter la première partie, le nombre 3 dont je peux prendre commodément le tiers.

La première étant 3, la seconde sera 12 et la troisième 35.

La question est réduite à partager 1240 liv. en trois parties

qui soient entre elles comme les trois nombres 3, 12 et 35. Ce qui se fait comme on l'a déjà indiqué (623).

20ᵉ. EXEMPLE.

Partager 510000 liv. à 8 personnes, à condition que les six premières auront chacune une part égale, que la septième n'aura que le quart de la part d'une des six précédentes, et la huitième personne n'aura que la moitié de ce qu'aura la septième : on demande ce qui revient à chacune.

Je prends le nombre 8 pour la part de l'une des six premières personnes, ainsi elles auront ensemble 48 liv.
la septième aura.............................. 2 liv.
et la huitième................................ 1 liv.

51 liv.

La question est réduite à partager 510000 liv. en 8 parties qui soient entre elles comme les nombres 8, 8, 8, 8, 8, 8, 2 et 1. Ce qui s'opère selon la règle établie (623).

De la règle de deux fausses positions.

653. Les arithméticiens distinguent encore la règle de deux fausses position de la précédente.

Elle sert dans les questions où il s'agit de partager, non pas le nombre même proposé, mais seulement une partie de ce nombre en parties proportionnelles à des nombres donnés. Des exemples feront assez connaître cette règle et son usage.

21ᵉ. EXEMPLE.

Il s'agit de partager 32114 liv. entre cinq personnes, de manière que la seconde ait deux fois autant que la première et 36 liv. de plus; que la troisième ait la moitié de la seconde et le tiers de la première moins 12 liv.; que la quatrième ait le double de la troisième et 24 l. de plus; qu'enfin la cinquième ait autant que la première et la quatrième.

Sans les 36 liv., les 12 liv. et les 24 liv., il est clair qu'il s'agirait de partager le nombre proposé en parties proportionnelles indiquées par l'énoncé de la question; mais, puisqu'il faut prélever sur ce nombre 36 liv. pour la seconde personne, 18 liv. pour la troisième moins 12 liv., c'est-à-dire, 6 liv., 12 liv., plus 24 liv. pour la quatrième, et enfin 36 liv. pour la cinquième, il est évident qu'il n'y a qu'une partie du nombre proposé qu'il faut partager en parties proportionnelles, après en avoir soustrait celle qui se compose de 36 l. + 18 l. — 12 l. + 12 l. + 24 l. + 36 l. = 114 l.; restent donc 32000 liv. à diviser en parties proportionnelles qu'on trouvera en suivant la méthode déjà indiquée (623).

654. Comme le nombre à partager en parties proportionnelles peut être plus difficile à trouver que dans l'exemple actuel, on suivra la méthode que voici :

Supposons que la première personne aura trois parts égales du nombre proposé, la seconde aura six parts semblables plus 36 liv.; la troisième aura 3 parts plus 18 liv. plus 1 part moins 12 liv., ou, en d'autres termes, 4 parts plus 6 liv.; la quatrième aura 8 parts + 12 liv. + 24 liv.; enfin la cinquième aura 11 parts + 36 liv. Or, en additionnant les résultats semblables, on trouvera 3 parts + 6 parts + 4 parts + 8 parts + 11 parts, c'est-à-dire, 32 parts égales plus 114 liv. Donc en retranchant 114 liv. de 32114, la question se réduira à partager 32000 liv. en parties qui aient entre elles les mêmes rapports que les nombres 3, 6, 4, 8 et 11, selon la méthode déjà indiquée (623) ou (624).

22e. EXEMPLE.

655. Un particulier demande à un négociant combien il a gagné de guinées sur une opération de commerce; il lui répond que s'il en avait gagné de plus la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{4}$, les $\frac{2}{3}$ et 5 par dessus, il en aurait gagné 150 : on demande combien il en a gagné.

5 guinées étant ôtées de 150 reste 145 guinées (*a*).

Maintenant je suppose pour le gain du négociant le nombre 12, sur lequel je peux prendre exactement la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{4}$, les $\frac{2}{3}$.

12	gain supposé.
6	est la motié dudit.
3	est le quart dudit.
8	en est les deux tiers.
29	

S'il avait gagné la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{4}$ et les $\frac{2}{3}$ de plus que 12 guinées, il en aurait donc évidemment gagné 29; mais comme il en aurait gagné 145 dans la supposition établie, il est évident que le gain inconnu doit être plus grand que 12 à proportion, ou, en d'autres termes, que le gain inconnu doit contenir 12, comme 145 contient 29; il faut donc pour le déterminer établir cette proportion :

$$29 : 145 \text{ liv.} :: 12 : x$$
$$\text{ou (378)} \quad 1 : 5 \text{ liv.} :: 12 : x = 60$$

En effet, 60 guinées sont le gain réel.

		60	
Car la	$\frac{1}{2}$	30	
le	$\frac{1}{4}$	15	
les	$\frac{2}{3}$	40	
et		5	par-dessus
font		150	guinées.

23e. EXEMPLE.

656. Trois négocians s'entretenant de leur capital, Pierre a dit : Jean a 4000 liv. de plus que moi, Michel a autant que nous deux, et nos trois capitaux s'élèvent à 148000 liv. : on demande le capital de chacun.

(*a*) Les cinq guinées qu'il aurait gagnées par-dessus n'étant pas proportionnelles à ce qu'il a gagné, à la moitié, au quart et aux deux tiers de plus, doivent être soustraites de 150.

ant je suppose que Pierre ait une part du capital commun, Jean aura également 1 part plus 4000 liv., et Michel 2 parts plus 4000 liv.; en ôtant ces 8000 liv. de 148000 liv., la question se réduit donc à partager 140000 l. entre les trois associés, en parties qui aient entre elles le mêmes rapports que les nombres 1, 1 et 2; ce qui se fait comme on l'a déjà indiqué (623) ou (624).

Jean aura 35000 liv. plus 4000 liv. =	39000 liv.
Pierre	35000
Michel	74000
	148000 liv.

24e. EXEMPLE.

657. Trois négocians s'entretenant de leur capital, Pierre a dit : Jean a 4000 liv. de moins que moi, Michel a autant que nous deux, et nos trois capitaux s'élèvent à 148000 liv. : on demande le capital de chacun.

Pierre a 1 part du capital, Jean à une part moins 4000 liv., Michel 2 parts moins 4000 liv. : le capital commun contient donc évidemment les 4 parts égales des trois associés moins les 4000 l. qui manquent à Jean pour avoir une de ces parts, et par conséquent moins encore les 4000 liv. qui manquent à Michel pour en avoir deux. Il est donc évident qu'en ajoutant les 8000 liv. aux 148000 liv. qui composent le capital commun, la question se réduira à partager 156000 liv. en parties proportionnelles, qui aient entre elles les mêmes rapports que les nombres 1, 1 et 2; ce qui se fait comme on l'a déjà indiqué (623) ou (624).

Pierre a le quart de 156000 liv. ci. . .	39000 liv.
Jean aura autant moins 4000 liv. ci. . .	35000
Michel autant que les deux autres, ci. .	74000
	148000 liv.

25e. EXEMPLE.

658. Un négociant a fait faire un ouvrage à un ouvrier dans l'espace de 30 jours, aux conditions que chaque jour où il travaillerait il gagnerait 5 liv., et qu'il en perdrait 6 chaque jour qu'il ne travaillerait pas. Quand on est venu à compter les jours de travail et ceux de repos, il s'est trouvé que l'ouvrier n'avait rien gagné : on demande combien de jours il a travaillé et combien de jours il s'est reposé.

Il est évident que le gain d'un jour de travail est à la perte d'un jour de repos, comme 5 : 6, ou que le gain d'un jour de travail n'est que les $\frac{5}{6}$ de la perte d'un jour de repos ; d'où il suit que, pour que l'ouvrier n'ait rien gagné, il suffit qu'il se soit reposé les $\frac{5}{6}$ du temps qu'il a travaillé. Je suppose donc qu'il ait travaillé 6 j. et qu'il se soit reposé 5, dans les 11 j., il est clair qu'il n'a rien gagné, et la question est réduite à partager le nombre 60 jours en parties proportionnelles aux nombres 5 et 6; ce qui se fait comme on l'a déjà indiqué (623) ou (624).

$$11 \text{ j.} : 60 :: 5 \text{ j. de repos} : x = 27 \text{ j. } \tfrac{3}{11}$$
$$11 \text{ j.} : 60 :: 6 \text{ j. de trav.} : x = 32 \text{ j. } \tfrac{8}{11}$$

Preuve.

$$27 \text{ j. } \tfrac{3}{11} \times 6 \text{ liv.} = 163 \text{ liv. } \tfrac{7}{11}$$
$$33 \text{ j. } \tfrac{8}{11} \times 5 \text{ liv.} = 163 \text{ liv. } \tfrac{7}{11}$$

On ne multiplie pas les exemples relatifs à la règle de deux fausses positions, parce qu'ils sont plus curieux qu'utiles au commerce.

De la règle d'alliage ou de mélange.

659. Cette règle est ainsi nommée parce qu'on en fait l'application à tous les cas relatifs aux mélanges ou aux alliages. Les questions qui en dépendent sont de deux sortes :

Dans l'une il s'agit de *trouver la valeur moyenne de plu-*

sieurs choses de valeurs différentes, dont le nombre et la valeur particulière de chacune sont connus ;

Dans la seconde, il s'agit de connaître les quantités de choses de chaque valeur ou de chaque espèce différentes qui doivent entrer dans un ou plusieurs mélanges, lorsqu'on connaît la valeur particulière de chacune, et la valeur moyenne qui doit résulter du mélange proposé.

Nous traiterons séparément des questions de la seconde sorte, quoique plusieurs auteurs les réservent pour l'algèbre. Quant à celles de la première, elles ne sont d'aucune difficulté. Voici la règle pour les résoudre :

660. *Multipliez le prix ou la valeur d'un objet de l'espèce donnée dans le problème par chaque nombre des objets de cette même espèce; additionnez les produits, et divisez la somme par le nombre total des objets de cette même espèce.*

1er. EXEMPLE.

Un négociant a acheté 15000 kilogrammes de café, savoir: 5500 liv. à 2 fr. le kil.; 4000 liv. à 2 fr. 50 c. le kil.; 5500 liv. à 3 fr. le kil.

Il demande à combien lui revient le kilogramme l'un portant l'autre, soit qu'il veuille mêler ses cafés ou non.

OPÉRATION.

5500 kil.	×	2 fr.	» c.	=	11000 fr.
4000	×	2	50	=	10000
5500	×	3	»	=	16500
15000 kil.					37500 fr.

La valeur totale des 15000 kilogrammes de café est donc 37500 fr., et par conséquent en divisant 37500 fr. par 15000, chaque kil. revient à 2 fr. 50 c.

En effet 15000 kil. : 1 kil. :: 37500 fr. : x
Rép. = 2 fr. 50 c.

2e. EXEMPLE.

661. Un négociant a 50 litres de vin de 1 fr. le litre (545); 60 *id.* de 75 c. le litre ; 35 *id.* de 1 fr. 60 c.; 50 *id.* de 90 c. : il veut les mêler ensemble, et demande à combien lui reviendra le litre.

50 lit.	×	1 f.	» c.	=	50 fr.
60	×		75	=	45
35	×	1	60	=	56
60	×		90	=	54
205 lit.					205 fr.

Or, en divisant 205 fr. par 205 litres, il est évident que le litre revient à 1 fr.

3e. EXEMPLE.

662. Un épicier a trois sortes d'épiceries de différens prix; il les veut mêler ensemble pour en composer une seule sorte d'épicerie : il demande combien il doit vendre le kilogramme de ce mélange.

Il a 80 kil.	de poivre à 2 fr. le kil.	=	160 fr.
30	de muscade à 6 fr.	=	180
20	de girofle à 15 fr. 50 c.	=	310
130 kil.			650 fr.

Or, en divisant 650 par 130, ou 65 par 13 (151), il est évident que le kilogramme revient à 5 fr.

4e. EXEMPLE.

663. On emploie 50 ouvriers à 20 s. par jour, 100 à 40 s.,

50 à 30 s., et 100 *id.* à 50 s. : on demande à combien chaque ouvrier revient l'un portant l'autre.

50 ouvriers	×	20 s.	=	1000 s.
100	×	40	=	4000
50	×	30	=	1500
100	×	50	=	5000
300 ouv.		Som. des prod.		11500 s.

Ce que coûtent 300 ouvriers s'élève à 11500 s. par jour; donc, en divisant 11500 s. par 300, on aura dans le quotient 38 s. 4 d., le prix auquel revient chaque ouvrier par jour l'un portant l'autre.

5ᵉ. EXEMPLE.

664. Un orfèvre a fondu ensemble trois quantités de matières d'argent de différens prix : savoir à combien lui revient le kilogramme de cette fonte.

Il a 4 kil.	à	100 fr.	=	400 fr.
2	à	96	=	192
4	à	92	=	368
10				960 fr.

Pour avoir la valeur moyenne du kilogramme, il ne s'agit que de diviser la somme des produits 960 fr. par celle des kilogrammes, c'est-à-dire, par 10; le quotient 96 est le prix moyen du kilogramme.

Quelques arithméticiens donnent le nom de *règle du prix commun* ou du prix moyen à celle dont on vient de donner des exemples, lorsqu'ils l'appliquent aux questions de la nature de celles qui viennent d'être proposées; mais dans tous les cas analogues il ne s'agit que de la même règle.

Titre moyen.

665. On fait aussi de fréquentes applications de cette règle

pour trouver le titre moyen ou commun de différentes quantités d'or ou d'argent de différens titres (*a*).

6e. EXEMPLE.

Un affineur a de l'or ou de l'argent du titre de 900 millièmes; il en a une égale quantité du titre de 925 millièmes, et une égale quantité du titre de 974 millièmes : il veut fondre le tout ensemble, et demande de quel titre sera la fonte.

OPÉRATION.

1	hectogr. au titre	de	900	millièmes.
1	id.	de	925	
1	id.	de	974	
3	hectogr.		2799	millièmes.

En divisant la somme des millièmes par celle des hectogrammes, c'est-à-dire, 2799 millièmes par 3, le quotient 933 millièmes exprime le titre moyen, c'est-à-dire, le titre de cette fonte.

7e. EXEMPLE.

666. On a fondu ensemble 3 lingots d'or ou d'argent, l'un pesant 3 hectogrammes 75 grammes au titre de 880 millièmes, l'autre 4 hectogrammes 80 grammes au titre de 900 millièmes, et le dernier 5 hectogrammes au titre de 950 millièmes : on demande quel est le titre de la fonte.

667. *Il faut multiplier le titre particulier de chaque lingot par son poids particulier réduit à sa plus petite dénomination, et diviser la somme des produits par celle des poids réduits à leur plus petite et commune dénomination. Le quotient sera le titre moyen, c'est-à-dire, celui de la fonte.*

(*a*) Pour vous former une idée exacte du titre des matières d'or et d'argent, voyez le *Traité du change*.

OPÉRATION.

3 hectogr.	75 gr.	=	375 gr.	×	880 mil.	=	330000 mil.
4	80	=	480	×	900	=	432000
5	"	=	500	×	950	=	475000
			1355 gram.				1237000 mil.

En divisant la somme des produits 1237000 par 1355, qui est celle des poids des lingots, le quotient 912 milllièmes est le titre de la fonte, à moins d'un millième près.

8e. EXEMPLE.

668. On a fondu ensemble 2 lingots d'or, l'un pesant 2 marcs 7 onces 3 gros, au titre de 20 kar. $\frac{20}{32}$, l'autre 3 marcs 7 onces 5 gros, au titre de 21 kar. $\frac{18}{32}$: on demande le titre de la fonte.

OPÉRATION.

2 m.	7 o.	3 g.	=187 g.	×20 k. $\frac{20}{32}$	=	123420	trente-deuxièmes(a).
3	7	5	=253	×21 $\frac{18}{32}$	=	174570	id.
			440 gros.			297990	id.

En divisant la somme des produits par celle des poids, c'est à-dire, en divisant 297990 trente-deuxièmes par 440, le quotient 677 trente-deuxièmes = 21 kar. $\frac{5}{32}$ exprimera le titre de la fonte à un trente-deuxième près.

ÉPOQUE COMMUNE.

669. On peut aussi faire un usage intéressant de cette règle pour trouver l'époque commune de différentes échéances.

(a) Le titre 20 k. $\frac{20}{32}$ réduit en trente-deuxièmes, = 660 trente-deuxièm. qui, étant multipliés par 187 gros = 123420 trente-deuxièm. Le titre 21 k. $\frac{18}{32}$ = 690 trente-deuxièmes étant multiplié par 253 gros = 174570 trente-deuxièmes. En général, lorsque le titre de l'or ou de l'argent est un nombre accompagné d'une fraction, il faut le réduire en parties d'un même dénominateur que celui de cette fraction, et opérer ensuite selon la règle générale (667).

EXEMPLE.

On a prêté 5000 fr. pour 3 mois 26 jours, c'est-à-dire, pour 116 jours; 4000 fr. pour 7 mois 14 jours, ou 224 jours; 9000 fr. pour 6 mois 20 jours, ou 200 jours, à 5 p. % l'an: on demande quelle est l'époque moyenne, voulant réunir ces trois paiemens en un seul.

Dans tous les exemples de cette nature, il faut opérer selon la règle générale suivante :

670. *Multipliez chaque nombre de jours pendant lesquels vous prêtez un capital par ce même capital, et divisez la somme de ces produits par celle de tous les capitaux prêtés.*

Le quotient exprimera le temps moyen que l'on demande.

OPÉRATION.

$$
\begin{aligned}
5000 \times 116 \text{ jours} &= 580000.\\
4000 \times 224 &= 896000.\\
9000 \times 200 &= 1800000.\\
\hline
&\ 3276000.
\end{aligned}
$$

Divisant 3276000 jours par 18000 fr., somme des divers capitaux prêtés, on aura un quotient 182 jours pour le terme moyen.

Démonstration.

En effet, ayant prêté pour 116 jours 5000 francs, par exemple, en multipliant 116 jours par 5000, on aura un nombre de jours 5000 fois plus grand; mais il est évident que l'intérêt, pris pour un nombre de jours 5000 fois trop grand, restera le même en le prenant sur 5000 fois moins d'argent, c'est-à-dire, en le prenant sur 1 fr. seulement, et non sur 5000 fr.

Il en résulte qu'après avoir multiplié, par un capital que l'on prête, le nombre des jours pendant lesquels on le prête, le produit indique le nombre de jours pendant lesquels l'intérêt est dû sur 1 fr. seulement; et par conséquent que *la somme des produits de plusieurs multiplications semblables indique le nombre de jours pendant lesquels l'intérêt est dû pour 1 fr. seulement.*

Mais il est évident aussi que, quand l'intérêt doit rester le même, plus le capital est grand, plus le nombre des jours portant intérêt doit être petit; qu'ainsi, à mesure que la somme des capitaux prêtés est plus grande que 1 fr., elle doit être prêtée un moins grand nombre de jours que 1 fr. Conséquemment, pour trouver le nombre de jours inconnu dans l'exemple ci-dessus, il faut établir cette proportion :

$$18000 \text{ fr.} : 3276000 \text{ j.} :: 1 \text{ fr.} : x.$$

Or, comme cette proportion a l'unité pour troisième terme, elle se réduit évidemment à une simple division ; donc *il ne s'agit que de diviser, par la somme des capitaux donnés, celle de ces mêmes capitaux multipliés chacun par le nombre des jours dont l'intérêt en est dû.*

Le quotient est le nombre des jours qui exprime le temps moyen.

9e. EXEMPLE.

671. Le 5 octobre 1818, ayant à payer, aux quatre époques différentes ci-dessous fixées, les quatre sommes suivantes, que l'on veut réunir en un seul paiement, on demande quelle est l'époque moyenne.

3000 fr. payables	au 21 nov.	46 jours.
4000	au 27 déc.	82
5000	au 9 janv. 1819	94
6000	au 15	100

OPÉRATION.

3000 fr.	×	46 jours	=	138000 jours.
4000	×	82	=	328000
5000	×	94	=	470000
6000	×	100	=	600000
18000 fr.				1536000 jours

En divisant 1536000 j. par 18000 fr., somme de tous les capitaux dont l'intérêt est dû pour des temps différens, on aura au quotient 85 jours = 2 mois et 25 jours pour le terme moyen. Or, en avançant de 2 mois 25 jours à partir du 5 octobre 1818, on arrive à l'époque commune que l'on cherche, laquelle est le premier janvier 1819. En effet, depuis le 5 octobre 1818 au premier janvier 1819, il y a 2 mois et 25 jours, et l'intérêt de 18000 fr. à 6 p. $\frac{0}{0}$ par an, pour 2 mois 25 jours, est bien 255 fr. comme celui de tous les capitaux proposés pendant les temps proposés.

Autre méthode.

OPÉRATION.

3000 fr.	au 21 novembre 1818,					
4000	au 27 déc.	36 j.	× 4000	=	144000 j.
5000	au 9 janv. 1819	48	× 5000	=	240000
6000	au 15 id.	54	× 7000	=	324000
18000 fr.					708000 j.

En divisant 708000 jours par 18000 fr., on aura au quotient 39 jours = 1 mois 9 jours, qu'il faut ajouter à l'époque du 21 novembre pour avoir l'époque moyenne ou commune; or, en avançant de 1 mois 9 jours, à partir du 21 novembre 1818,

on arrive à l'époque commune que l'on cherche, laquelle est le premier janvier 1819.

Explication.

1°. La plus courte des quatre échéances ci-dessus, c'est-à-dire, le 21 novembre 1818, est prise d'abord pour époque commune des quatre paiemens ci-dessus; 2°. mais comme les trois derniers ont une époque plus reculée, on multiplie chaque capital par le nombre des jours pendant lesquels il a été prêté au-delà du 21 novembre; 3°. après cela, on divise la somme des produits de ces multiplications par 18000 fr., somme des capitaux prêtés.

Le quotient 39 jours est le temps qu'il faut ajouter à celui échu le 21 novembre 1818 pour avoir l'échéance ou l'époque commune que l'on cherche.

672. On peut de même trouver *l'intérêt moyen* de plusieurs sommes prêtées à des taux d'intérêt différens.

10e. EXEMPLE.

Un négociant a pris	3000 fr.	à 5	p. % par an
	5000	6	id.
	7000	7	id.

Il demande quel en est l'intérêt moyen.

A 5 fr. d'intérêt pour 100 fr., il est évident que l'intérêt de 1 fr. n'est que la centième partie de 5 fr., c'est-à-dire, que $\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$ de franc; à 6 p. % fr., l'intérêt de 1 fr. n'est que $\frac{6}{100}=\frac{3}{50}$ de franc.

A 7 p. % l'intérêt de 1 fr. est $\frac{7}{100}$ de franc. Conséquemment:

OPÉRATION.

$$
\begin{array}{llll}
3000\text{ f.} & \times \frac{1}{20} & \text{ou par l'intérêt de 1 fr.} & = 150\text{ fr.} \\
5000 & \times \frac{3}{50} & & = 300 \\
7000 & \times \frac{7}{100} & & = 490 \\
\hline
15000 & & \text{Somme des intérêts.} & 940\text{ fr.}
\end{array}
$$

673. En divisant cette somme par 15000 fr., somme de tous les capitaux, on aura au quotient $\frac{940}{15000} = \frac{47}{750}$ pour l'intérêt moyen de 1 franc. En effet, en multipliant 15000 fr. par $\frac{47}{750}$, on trouvera que l'intérêt de 15000 est 940 liv., somme égale à celle des intérêts des différens capitaux proposés.

Si on voulait savoir à combien pour 100 revient l'intérêt moyen, il faudrait établir cette proportion :

$$15000 : 940 :: 100 : x = 6 \tfrac{4}{15}.$$

De la seconde sorte de mélange.

674. Un négociant a du vin de deux qualités, l'une de 150 f. et l'autre de 250 fr. le tonneau : il demande quelle quantité il en faut de l'un et de l'autre prix pour en former un mélange qui revienne à 200 fr. le tonneau.

D'abord j'observe que la différence de 150 fr. à 200 étant 50 fr., comme celle de 250 à 200, je ferai, sur un tonneau de 150 fr., un bénéfice égal à la perte que je ferai sur un tonneau de 250, si je les mêle tous deux pour les livrer à 200 fr. le tonneau; qu'ainsi il faut une égale quantité de vin de l'un et de l'autre prix pour que le mélange proposé revienne à 200 fr. le tonneau. Conséquemment :

675. Pour connaître les quantités de marchandises qui doivent entrer dans un mélange quelconque, et faire revenir l'unité des marchandises de ce mélange au prix proposé, il faut d'abord chercher la différence du prix de l'unité de chaque qualité de marchandises avec celui de l'unité du mélange proposé; et si les différences de ces prix avec celui du mélange

sont égales entre elles, il faut en conclure que les quantités de marchandises qu'il s'agit de mélanger doivent être de même égales entre elles (674). D'où il suit qu'en général:

676. *Les quantités de marchandises de prix différens qui doivent composer un mélange d'un prix donné, doivent être égales entre elles, lorsque les différences de chaque prix particulier avec le prix du mélange proposé sont égales entre elles.*

677. Les quantités à mélanger ont donc évidemment entre elles des rapports analogues à ceux des différences du prix de l'unité de chacune avec celui de l'unité du mélange. Il ne reste plus qu'à découvrir la nature de ces rapports.

IIᵉ. EXEMPLE.

678. Un négociant a du vin de deux qualités, l'une de 150 fr., l'autre de 350 : il demande quelle quantité il en faut de l'un et de l'autre prix pour composer un mélange qui revienne à 200 fr. le tonneau.

D'abord je cherche la différence de 150 fr. à 200, laquelle est 50 fr., et celle de 350 fr. à 200, laquelle est 150 fr. Dans ces deux prix inégaux, j'observe que la différence du plus grand à celui du mélange contient trois fois la différence du plus petit à celui de ce même mélange; par conséquent qu'en prenant une égale quantité de vin de ces deux prix, je perdrais trois fois plus sur celui qui est le plus cher, que je ne gagnerais sur celui qui l'est moins. Mais j'observe, d'un autre côté, que, si la perte d'un tonneau du vin le plus cher est trois fois plus grande que le bénéfice d'un tonneau de celui qui vaut moins, je peux la compenser en prenant 3 tonneaux du moins cher et 1 tonneau seulement de celui qui vaut le plus : qu'ainsi :

679. *Pour connaître la quantité de marchandises de chaque prix particulier qui doit entrer dans un mélange dont le prix est fixé, il faut chercher la différence du plus grand de*

ces deux prix particuliers au prix fixé pour le mélange, et considérer le nombre qui exprime cette différence comme la quantité qui doit entrer dans le mélange proposé des marchandises DU PRIX LE PLUS BAS; *il faut ensuite chercher la différence du prix le plus bas au prix du mélange, et considérer le nombre qui exprime cette différence comme la quantité de marchandises* DU PRIX LE PLUS HAUT *qui doit entrer dans ce même mélange.*

La somme des deux différences donne la totalité du mélange opéré conformément aux données du problème proposé.

OPÉRATION.

150 fr.		150 tonneaux.
	200 fr.	
350		50
		200 tonn. tot. du mél.

Pour poser la règle, et ensuite pour l'opérer conformément à la règle ci-dessus,

1°. J'ai écrit le prix inférieur à celui du mélange; or ce prix inférieur est 150 fr.;

2°. J'ai écrit au-dessous le prix supérieur à celui du mélange; or ce prix supérieur est 350 fr.;

3°. J'ai écrit le prix moyen ou celui du mélange entre les deux autres un peu vers la droite; or le prix du mélange est 200 fr., et la règle étant posée, il ne s'agit plus que de l'opérer;

4°. Pour l'opérer, j'ai cherché la différence qui existe entre le prix particulier le plus haut et le prix du mélange, c'est-à-dire, entre 350 et 200, laquelle différence est 150; j'ai considéré le nombre 150 comme l'expression de la quantité des tonneaux de vin du prix particulier *le plus bas* qui doit entrer dans le mélange proposé; et j'ai porté le nombre 150 à la droite de ce prix particulier, pour indiquer qu'il doit entrer 150 tonneaux de vin de ce prix dans le mélange proposé;

5°. J'ai ensuite cherché la différence qui existe entre le prix le plus bas et le prix du mélange, c'est-à-dire, entre 150 et 200, laquelle différence est 50; j'ai considéré le nombre 50 comme l'expression de la quantité des tonneaux du vin du prix *le plus haut* qui doit entrer dans le mélange proposé, et j'ai porté le nombre 50 à la droite de ce prix particulier, pour indiquer qu'il doit entrer 50 tonneaux de vin du prix de 350 fr. dans le mélange proposé;

6°. Ayant additionné les deux différences 150 et 50, la somme a donné la totalité des tonneaux mélangés. Ainsi sur un mélange de 200 tonneaux, j'ai vu qu'il en fallait 150 du prix de 150 fr. et 50 seulement de 350.

Or, comme le vin du plus haut prix n'entre dans le mélange proposé que pour le quart de sa totalité, puisque 50 tonneaux n'est autre chose que le quart de 200 tonneaux, on voit que, quelle que fût la quantité du mélange proposé, le vin le plus cher et le moins cher devraient y entrer proportionnellement aux nombres 1 et 3, dont la somme est 4, ou aux différences 50 et 150, dont la somme est 200, lesquelles différences sont entre elles dans les mêmes rapports que 1 et 3, et peuvent être ramenées à une expression aussi simple en prenant des parties égales sur l'une et sur l'autre, ce qui ne change pas leur rapport mutuel. Conséquemment :

680. Après avoir déterminé les différences de chacun des deux prix particuliers au prix du mélange, en observant de porter celle du prix le plus haut au prix moyen à la droite du prix le plus bas, celle de ce dernier avec le prix du mélange à la droite du prix le plus haut, pour indiquer la quantité de marchandises de chacun de ces prix particuliers qui doit entrer dans le mélange proposé (679), quelle que soit la quantité des marchandises qui doivent composer le mélange total, les quantités de chaque prix particulier qui le composeront doivent être entre elles dans des rapports égaux à ceux dans lequel les différences de chaque prix particulier au prix du mé-

lange sont entre elles dans l'ordre inverse où ces différences ont été déterminées (*a*).

La règle d'alliage se réduit donc à celle par laquelle il s'agit de trouver des parties qui aient entre elles des rapports donnés (623), et ces rapports sont donnés par les différences de chacun des prix particuliers des marchandises qui doivent entrer dans le mélange proposé avec le prix auquel il doit revenir (680).

Conséquemment tout ce qui concerne la règle d'alliage peut être réduit aux termes suivans :

681. Pour opérer la règle d'alliage, il faut 1°. *chercher la différence du prix particulier le plus* HAUT *à celui du mélange, et la porter à la droite du prix le plus* BAS, *pour indiquer la quantité de marchandises de ce prix qui doit entrer dans le mélange proposé ;* 2°. *il faut chercher la différence du prix particulier le plus* BAS *à celui du prix du mélange, et la porter à la droite du prix le plus* HAUT *pour indiquer la quantité des marchandises de ce prix qui doit entrer dans le mélange proposé.*

La somme de ces deux différences sera la totalité des marchandises de prix différens qui doivent composer le mélange proposé au prix fixé, et le nombre qui exprime chaque différence sera la quantité qui doit entrer dans le mélange des marchandises du prix particulier à la droite duquel ce nombre se trouve placé.

3°. *Lorsque la quantité du mélange proposé est déterminée, il faut partager le nombre qui exprime cette quantité en parties qui aient entre elles les mêmes rapports que les nombres qui expriment les différentes quantités de marchandises de chaque prix particulier qui doivent entrer dans le mélange proposé* (679), *ce qui se fait par le moyen déjà indiqué* (623).

682. *Lorsqu'il s'agit de mélanger plus de deux qualités de marchandises, et en quelque nombre que soient les quali-*

(*a*) Voyez l'opération du numéro (579) et son explication.

tés de prix différens, 1°. pour poser la règle, établissez les uns au-dessous des autres tous les prix inférieurs à celui du mélange; ensuite au-dessous de ces premiers, mais un peu reculé vers la droite, le prix du mélange; et enfin, après les précédens, et toujours les uns au-dessous des autres, tous les prix supérieurs à celui du mélange proposé;

2°. Pour opérer la règle, cherchez la différence de l'un des prix supérieurs à celui du mélange, portez cette différence à la droite de l'un des prix inférieurs, cherchez de suite la différence de ce dernier à celui du mélange, et portez cette différence à la droite du prix supérieur dont la différence avec celui du mélange a été portée à la droite du prix inférieur sur lequel vous venez d'opérer (679);

3°. Faites la même opération sur deux autres prix, l'un supérieur, l'autre inférieur à celui du mélange, et ainsi de suite autant de fois qu'il s'en trouvera deux nouveaux, l'un supérieur, l'autre inférieur : la somme totale des différences exprimera la totalité du mélange;

4°. Dans les cas où il se trouvera un plus grand nombre de prix supérieurs à celui du mélange que de prix inférieurs, ou de ces derniers que des premiers, après avoir cherché les différences de deux prix, l'un supérieur, l'autre inférieur à celui du mélange, et après avoir fait cette opération autant de fois qu'il s'est trouvé deux nouveaux prix, l'un supérieur et l'autre inférieur, il faut chercher la différence de l'un des prix supérieurs restans avec celui du mélange, et ajouter cette différence par le signe +, ou le mot plus *à celle déjà écrite à la droite de l'un des prix inférieurs; il faut chercher de suite la différence de ce dernier avec celui du mélange, et la porter à la droite de celui des prix supérieurs restans, dont on vient d'ajouter la différence à celle déjà écrite à la droite de ce même prix inférieur, et ainsi de suite pour chacun des autres prix supérieurs; et il en serait de même des prix inférieurs qui se trouveraient en plus grand nombre que les prix supérieurs.*

La somme de toutes les différences ajoutées à la droite de chaque prix particulier indique la quantité des marchandises de ce prix qui doit entrer dans le mélange proposé, pour le faire revenir au prix fixé.

5°. *Pour avoir les quantités de marchandises de chaque prix particulier qui doivent composer un mélange dont la totalité est déterminée, et n'est pas égale à la somme des différences déterminées selon la règle déjà établie* (682), *après avoir déterminé ces différences, la question se réduit à partager le nombre qui exprime la totalité de ce mélange en parties qui aient entre elles les mêmes rapports que les nombres qui expriment les différentes quantités de marchandises de chaque prix particulier qui doivent entrer dans le mélange proposé* (679); *ce qui se fait par le moyen déjà indiqué* (623).

12e. EXEMPLE.

683. Un marchand a du vin du prix de 75, 80, 90, 120, 125 et 150 centimes le litre : il demande combien il doit entrer de litres de chaque prix dans un mélange de 1500 litres, pour que ce mélange revienne à 1 franc le litre.

OPÉRATION.

75 c.		50 lit.
80 c.		25
90 c.		20
	1 fr.	
120 c.		10
125 c.		20
150 c.		25
		150 lit. tot. d. m.

En déterminant les différences des prix particuliers à celui du mélange selon la règle indiquée (682), la somme de 150 litres de ces différences indique la totalité des litres qui doivent

composer le mélange proposé, dans lequel il doit entrer 50 litres du prix de 75 c., 25 litres de celui de 80 c., 20 litres de celui de 90 c., 10 du prix de 120 c., 20 de celui de 125 c., et 25 de celui de 150 c.; les quantités de litres de chaque prix qui doivent entrer dans un mélange de 1500 litres, doivent donc avoir entre elles les mêmes rapports que les nombres 50, 25, 20, 10, 20 et 25 : pour avoir ces quantités, il ne s'agit que de trouver des parties du nombre 1500, proportionnelles aux nombres 50, 25, 20, 10, 20 et 25, selon la règle établie (623).

OPÉRATION.

150 lit.	:	1500 lit.	::	50 lit.	:	x	=	500 lit.
150	:	1500	::	25	:	x	=	250
150	:	1500	::	20	:	x	=	200
150	:	1500	::	10	:	x	=	100
150	:	1500	::	20	:	x	=	200
150	:	1500	::	25	:	x	=	250
								1500 lit. (*a*)

Preuve.

500 lit.	à	75 c. le lit.	=	375 fr.
250	à	80	=	200
200	à	90	=	180
100	à	120	=	120
200	à	125	=	250
250	à	150	=	375
1500 lit.	à	1 f.	= 1500 f. (*b*)	1500 fr. (*c*)

(*a*) La somme des parties de 1500 qui ont entre elles les mêmes rapports que les nombres 50, 25, 20, 10, 20 et 25, étant 1500, on peut en conclure que ces parties ont été exactement prises.

(*b*) 1500 litres à 1 franc, prix commun du litre du mélange proposé, reviennent à 1500 fr. comme les 1500 litres de différentes qualités aux différens prix fixés.

(*c*) Les 1500 litres de divers prix revenant à 1500 francs, ou à 1 fr. le litre, prix commun, il est évident que le mélange est bien opéré.

Ou, comme le mélange proposé de 1500 litres est 10 fois plus grand que celui de 150 litres déterminé par la somme des différences de chaque prix particulier à celui du mélange, il est évident que les quantités de litres de chaque prix particulier doivent être aussi chacune 10 fois plus grande pour composer le mélange de 1500 litres que pour composer celui de 150; d'où il suit qu'il suffit de multiplier par 10 chacune des quantités de litres qui doivent composer ce dernier.

13e. EXEMPLE.

684. Un négociant a du café de 2 fr., de 3 fr., de 5 fr., de 6 fr., de 7 fr. et de 8 fr. le kilogramme : il demande combien il en doit entrer dans un mélange de 6800 kilogr., pour que ce mélange revienne à 4 fr. le kilogramme.

OPÉRATION.

2 fr.		4 kil. + 2 + 1 = 7.
3		3
	4 fr.	
5		2
6		2
7		1
8		2
		17 kil.

Ayant pris la différence de 8 fr. à 4 fr., qui est 4 fr., et celle de 2 fr. à 4 fr., qui est 2 fr., et porté cette dernière à la droite de 8 fr., et la précédente à la droite de 2 f., ayant fait la même opération pour les deux prix particuliers 7 fr. et 3 fr., et porté la différence de 7 à 4 à la droite de 3 fr., et celle de 3 à 4 à la droite de 7 fr., j'ai cherché la différence de 6 à 4 fr., qui est de 2 fr., et ayant porté cette différence précédée du signe + à la suite de celle déjà écrite à la droite de 2 f., qui est le prix le plus bas, j'ai porté la différence de celui-ci,

c'est-à-dire, de 2 fr. à 4, à la droite de 6 fr.; enfin, j'ai porté de même la différence de 5 à 4 à la suite des deux différences déjà écrites à la droite de 2 fr., et la différence de 2 fr. à 4 à la droite de 5 : par ce moyen j'ai vu qu'il devait entrer dans le mélange proposé 4 kil. plus 2 plus 1 = 7 kil. du prix de 2 fr., 3 kil. de celui de 3 fr., 2 kil. de celui de 5 fr., 2 *id.* de celui de 5 fr., 1 de celui de 7 fr., et 2 de celui de 8 fr., ce qui compose en total un mélange de 17 kilogrammes.

La question se réduit ensuite à trouver des parties du nombre 6800 kil. qui aient entre elles les mêmes rapports que les nombres 7, 3, 2, 2, 2 et 1, dont la somme est 17; ainsi :

$$
\begin{array}{lllllr}
17 \text{ kil.} & : 6800 & :: 7 & : x & = & 2800 \\
17 & : 6800 & :: 3 & : x & = & 1200 \\
17 & : 6800 & :: 2 & : x & = & 800 \\
17 & : 6800 & :: 2 & : x & = & 800 \\
17 & : 6800 & :: 2 & : x & = & 800 \\
17 & : 6800 & :: 1 & : x & = & 400 \\
\hline
 & & & & & 6800
\end{array}
$$

Or en considérant 17, somme totale des parties du mélange de 17 kilogr., comme le nombre des parties égales, dans lesquelles le mélange de 6800 kilogr. doit être divisé (634), et en divisant en effet 6800 par 17, le nombre 400 kilogr. exprime l'une de ces 17 parties égales qu'il faut multiplier par 7 pour avoir la quantité des kilogrammes du prix de 2 fr.; par 3 pour avoir celle du prix de 3 fr.; par 2 pour avoir celle du prix de 5 fr. : et encore par 2 pour avoir celle du prix de 8 fr., et par 1 seulement pour avoir celle du prix de 7 fr.

OPÉRATION.

$$400 \times 7 = 2800 \text{ kilogr.}$$
$$400 \times 3 = 1200$$
$$400 \times 2 = 800$$
$$400 \times 2 = 800$$
$$400 \times 2 = 800$$
$$400 \times 1 = 400$$

6800 kilogr.

Application de la règle d'alliage au commerce des matières d'or et d'argent, à la fabrication des ouvrages faits avec ces matières, et à la fabrication des monnaies.

685. La théorie des règles d'alliage est très-utile dans les opérations des monnaies, et sa connaissance est d'une nécessité indispensable pour toutes les personnes qui travaillent les matières d'or et d'argent, pour toutes celles qui en font le commerce, et pour les banquiers.

On ne peut l'appliquer avec facilité aux questions relatives à l'alliage des matières d'or et d'argent, que lorsqu'on sait comment on exprime dans le commerce le degré de pureté de ces métaux, c'est-à-dire, ce qu'on appelle leur titre; que l'on conçoit bien comment le prix de ces métaux est proportionnel à leur titre, et comment les poids où les monnaies d'or et d'argent d'une même dénomination, mais de différens titres, ont entre eux les mêmes rapports que ces titres (*a*) : il faut donc commencer par être bien fixé sur tous ces points; alors la règle d'alliage n'a plus la moindre difficulté.

686. Pour déterminer, par le moyen d'une règle de trois simple, la quantité d'alliage ou de matière pure qui doit être ajoutée à la masse d'une fonte quelconque, voyez ce qui en est dit dans le chapitre du titre des matières d'or et d'argent (*b*).

(*a*) Il faut voir pour tous ces objets mon *Traité de change.*

(*b*) Dans mon *Traité de change.*

687. Quant aux quantités de matières d'or et d'argent de différens titres qui doivent entrer dans un mélange d'un titre et d'un poids quelconque fixés par la question proposée, il faut opérer sur les mêmes principes que pour opérer un mélange quelconque de la seconde sorte (681).

14e. EXEMPLE.

On veut avoir 60 marcs d'or au titre de 22 karats, on en a de celui de 24 karats et de 20 karats : on demande combien on doit prendre de marcs d'or de chacun de ces derniers titres.

OPÉRATION.

20 karats		2 marcs.
	22 karats	
24 karats.		2 marcs.
		4 marcs.

Il est évident qu'il faut prendre une égale quantité de marcs de chaque titre, c'est-à-dire, 30 marcs de chacun, parce que la différence de chaque titre particulier au titre moyen est la même (675), c'est-à-dire, parce que la différence de 20 à 22 est la même que celle de 24 à 22.

15e. EXEMPLE.

688. Un directeur des monnaies veut fabriquer des pièces d'or au titre de 21 karats $\frac{21}{32}$, et du poids de 120 marcs, il a de l'or à 21 karats $\frac{17}{32}$ et a 24 karats : il demande combien il faut de marcs d'or de ces deux derniers titres pour en composer 120 marcs au titre de 21 karats $\frac{17}{32}$.

OPÉRATION.

21 karats $\frac{17}{32}$	
	21 karats $\frac{21}{32}$.
24 karats	

Ou en réduisant ces trois différens titres en grains de fin, c'est-à-dire, en trente-deuxièmes, et en supprimant les dénominateurs des titres exprimés par des trente-deuxièmes, ce qui ne change rien aux rapports de ces différens titres, on les a sous ces nouvelles formes :

OPÉRATION.

21 karats $\frac{17}{32}$	$= 689$		75 marcs.
		693	
24 karats	$= 768$		4 marcs.
			79 marcs.

Les quantités d'or des deux titres proposés, et qui doivent composer un mélange du titre de 21 karats $\frac{21}{32}$, sont donc entre elles dans les rapports de 75 à 4. Conséquemment, pour savoir combien il doit entrer de marcs de chaque titre dans un mélange de 120 marcs, il faut établir les proportions suivantes :

$$79 : 120 :: 75 : x = 113 \text{ m. } \frac{73}{79}$$
$$79 : 120 :: 4 : x = 6 \text{ m. } \frac{6}{79}$$

16e. EXEMPLE.

689. Avec de l'argent à 11 d. 15 grains, de l'argent à 10 d. 6 grains de fin, on veut faire de l'argent au titre de 10 d. et 20 grains : on demande ce qu'il faut prendre de l'un et de l'autre.

11 den.	15 gr.	$= 279$ gr. de fin		14 m.
			260 (*a*)	
10	6	$= 246$ id.		19 m.

(*a*) 11 d. 20 gr. = 260 grains de fin.

17e. EXEMPLE.

690. Avec de l'or à 23 kar. $\frac{15}{32}$, et de l'or à 21 karats $\frac{18}{32}$, on demande de faire de l'or au titre de 22 kar. $\frac{25}{32}$.

21 karats $\frac{18}{32}$ = 690 gr. de fin		22 m.
	729 (*a*)	
23 karats $\frac{15}{32}$ = 751 id.		39 m.

18e. EXEMPLE.

691. Un directeur de monnaies a 10 marcs d'argent au titre de 9 d. 20 gr., 8 marcs à 10 d. 20 gr., et 55 marcs à 11 d. 9 gr. : il demande combien il faut qu'il en prenne de chaque titre pour composer un mélange de 100 marcs au titre de 10 d. 22 gr.

OPÉRATION.

9 d.	20 gr.	= 236 gr. de fin		11 m.	= 11 m.
10	20	= 260 id.		11	= 11
			262 id. (*b*)		
11	9	= 273 id.		26 + 2 (*c*)	= 28 m.
					50 m.

Il faut donc évidemment 22 marcs au titre de 9 d. 20 gr., 22 à celui de 10 d. 20 gr., et 56 à celui de 11 d. 9 gr. pour composer un mélange de 100 marcs au titre de 10 d. 22 gr., c'est-à-dire, il faut le double de chaque quantité trouvée par la règle d'alliage.

19e. EXEMPLE.

692. Avec de l'or ou de l'argent au titre de 800 millièmes,

(*a*) 22 kar. $\frac{25}{32}$ = 729 grains de fin.

(*b*) 10 d. 22 gr. = 262 grains de fin.

(*c*) La différence de 236 à 262 est de 26, celle de 260 à 262 est 2; or 26 + 2 = 28 marcs; il faut donc dans le mélange 28 marcs du titre de 11 d. 9 gr.

à celui de 820, à ceux de 900 et de 950, on veut composer un mélange du titre de 840 millièmes : on demande combien il faut de kilogrammes de chaque titre.

OPÉRATION.

800		110 kil.
820		60
	840	
900		20
950		40
		230 kil.

Preuve.

110 kil. au titre de 800 milliém., contenant chacun 800 mill. de fin valent 800 × 110 = 88000 millièmes

60 kil. au titre de	820 millièmes	=	49200
20	900	=	18000
40	950	=	38000
230			193200 millièmes.

Or 193200 millièmes étant divisés par 230 kilogr., le quotient 840 indique que leur titre moyen est 840 millièmes; ce qui prouve l'exactitude de l'opération.

CONCLUSION.

693. L'arithmétique, ou la science des nombres, n'a pour objet que de les composer et décomposer.

Lorsqu'on veut faire l'application des règles de l'arithmétique à la détermination des rapports qui existent entre deux grandeurs, on a vu qu'il faut avoir des notions des rapports des grandeurs, et par conséquent de la manière dont on les compare en géométrie (340).

De même que, lorsqu'on veut trouver le quatrième terme d'une proportion, il faut emprunter de la géométrie les notions des proportions simples et composées (381 et 543).

Lorsqu'on veut faire l'application des règles de l'arithmétique aux opérations de banque, on a vu (584) qu'il faut emprunter, de la science de la banque ou du change, les notions qui n'appartiennent qu'à elle.

Lorsqu'on veut faire l'application de ces mêmes règles à des nombres ayant une unité *carrée* ou *cubique*, etc., en un mot, servant de mesure à l'étendue, il faut avoir des notions des trois dimensions que les géomètres considèrent dans les corps, ainsi que des lignes, des surfaces et des volumes qu'ils y considèrent, d'où dérivent les mesures linéaires, carrées et cubiques, etc., toutes choses qui appartiennent exclusivement à la géométrie.

Les opérations de banque exigent la connaissance d'une infinité de faits dont la mémoire ne peut se charger, et qui ne doivent trouver place que dans un traité du change ; il faut donc avoir recours à mon *Traité du Change*, lorsqu'on sait bien tout ce que l'arithmétique commerciale comprend.

Les opérations arithmétiques relatives à l'étendue exigent la connaissance de la nature des unités carrées, cubiques, etc., notions qui appartiennent à la géométrie. Ayant néanmoins traité, dans mon *Arithmétique pratique*, de ces objets, pour s'en occuper, il faut avoir recours à cet ouvrage, comme pour l'extraction des racines carrées et cubiques, et pour les logarithmes.

Au surplus, le tòisé ou les multiplications et divisions géométriques se font en tous points sur les mêmes principes que la multiplication et ladivision complexes, lorsqu'on connaît la nature de l'unité des nombres à multiplier ou à diviser, et lorsqu'on divise le carré, ou le cube qui est pris pour unité, en partis analogues à celles dans lesquelles on divise l'unité linéaire de même dénomination et du même pays que ce carré ou ce cube.

L'arithmétique en elle-même est d'une extrême facilité; c'est en confondant avec elle ce qui lui est étranger, que l'on crée des difficultés qui s'évanouissent aussitôt que l'on s'est fait une juste idée de chaque objet nouveau auquel on applique les règles du calcul.

L'*Arithmétique Commerciale* les fera connaître dans tous leurs développemens.

Lorsqu'on connaîtra bien toutes les applications qu'elle comprend, on fera sans difficulté toutes celles relatives aux opérations de banque qu'il faut voir dans le *Traité du Change*.

Mais, comme les personnes qui sont dans les affaires, ou qui s'y destinent, n'ont pas toujours du temps à donner à des études suivies, et pour rendre facile pour elles la réduction des poids, mesures et monnaies de tous les peuples commerçant, en ramenant leur réduction réciproque à de simples multiplications ou divisions, j'ai donné les rapports mutuels des poids et mesures de ces peuples, dans mon *Manuel du Commerce*.

Avec son secours, connaissant bien l'arithmétique et les opérations de la banque, il n'est aucune réduction qui puisse embarrasser.

Mon *Manuel du Commerce*, ainsi que mon *Traité du Change*, doivent donc être considérés comme une suite nécessaire de l'*Arithmétique Commerciale*.

FIN.



TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

DE L'ARITHMÉTIQUE ET DE SES OPÉRATIONS FONDAMENTALES.

SECONDE PARTIE.

DES RAPPORTS DES PROPORTIONS, ET DES RÈGLES QUI EN DÉPENDENT.

FIN DE LA TABLE.



